2-7 W|A を使ってみよう

1. 先の 2-6 節の問と同じです．W|A の日本語表示で「科学と技術」の項目の最後の「その他」 をクリックすると，表示画面のタイトルには色々なタイトルが英語で並んでいます．このページ「Science & Technology」の「Physics」「Unit & Measures」，「Computational Sciences」，「Transportation」，「Technological World」，「Space & Astronomy」，「Physical Geography」，「Food Science」，「Chemistry」，「Engineering」，「Earth Sciences」，「Materials」，「Life Sciences」，「Weather & Meteorology」，「Health & Medicine」の中からいずれか 2 つを選び，その 2 つのタイトルの最後にある「More examples」 More examples をクリックし，そのページに表示されたタイトル(見出し)の全てを和訳しましょう．先の 2-6 節で選ばなかったもの 2 つで答えましょう．日本語訳を知らないものだけ調べ英語と併記しましょう．

2-7-1 微分と積分

2. $\frac{x}{x^2+2x+1}$ の部分分数分解を求めなさい．

補足 : W|A の「代数」の「有理関数」の部分分数分解の ステップごとの解説 を参考．

3. 問 2 で求めた部分分数分解を用いて $\frac{x}{x^2+2x+1}$ の不定積分を求めなさい．

4. $\frac{1}{x^2+A}$ の不定積分を求めなさい (A は正の定数)．

5. $\sin^{-1}(x)$ $(=\arcsin(x))$ のxによる微分を求めなさい．

補足 : $\sin^{-1}(x) \neq \frac{1}{\sin(x)}$

6.　$y=e^{-x^2}$ と $y=e^{-(x-1)^2}$ および $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ のグラフを重ねて描きなさい．
またこれらの 3 つの関数の中で，それぞれの関数と x 軸で囲まれた部分の面積が一番大きい関数を答えなさい．

補足：W|A で「plot(exp(-x^2)), exp(-(x-1)^2), exp(-(x^2)/2))」．ただし他にも色々な入力指定方法があります．

7.　問 6 の 3 つの関数のxによる微分を求めなさい．

8.　$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^a}dx$を求めなさい．ここで$a$は実数とする．

補足 1 : 2-1 の問 8-2 の結果を思い出しましょう．$a>0$でかつ大きな数値の場合は$\frac{1}{x^a}$は∞に近づいて行くとき非常に早く小さくなります．このとき x 軸, y 軸軸とこの関数で囲まれた部分の面積は$a>0$でかつ大きな数値であると面積が求まりそうです．ところで$a=0$の場合は，$\int_1^{\infty}dx$であり面積が発散(∞)になることは簡単にわかります．$a=1$のあたりが微妙なようです．

補足 2 : W|A で「1/(x^a) を x=1 から x=infinity まで積分」とした結果が，「定積分」では$\frac{1}{a-1}$ ただし，$\mathrm{Re}(a)>1$という制限付きで表示されます．この「定積分」は正しくは「広義積分」と呼ばれます．また表記$\mathrm{Re}(a)$はaの実数部の意味です．従い問の条件と一致し問題ありません．つまり$a>1$ならば積分が求まる(面積が決まる)ということです．では$0<a\leq 1$の場合はどうなるでしょうか？

$a=1$の時，積分は$[\log x]_1^{\infty}$となります．$0<a<1$の場合は$\left[\frac{x^{1-a}}{1-a}\right]_1^{\infty}$となり，どちらも発散する(∞となる)ことが分かります．

補足 3 : これまでの有限な区間で行う積分（$\int_a^b f(x)dx,\ a\leq x\leq b$）を定積分といい，積分区間が有限な区間でない積分(例 : $\int_a^{\infty}dx,\ a\leq x\leq\infty$)を広義積分といい区別します．ここでaとb は実数とします．広義積分の型は他にも色々あります．次の問 9 も広義積分です．

9.　$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を求めなさい.

補足：W|A で「∫[0,∞]e^(-x^2) dx」や「e^(-x^2) を x=0 から x=∞まで積分」と入力.

10.　$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を問 6，9 の結果を考察して暗算で値を求めなさい.

11.　$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ を問 10 の結果を考察して暗算で値を求めなさい.

12.　$k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$ となるkの値を求めなさい．ここでμとσは定数です.

補足：$\mathrm{X} = \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2}\sigma}$の変数変換をすると問 10 と同じ形の積分をすることになります．変数変換による積分から$\mathrm{dX} = \frac{dx}{\sqrt{2}\sigma}$です.

13.「正規分布」の確率密度関数,「標準正規分布」の確率密度関数をインターネットから調べ，統計分野との関係を理解しておきましょう.

2-7-2 行列

2-6-4 の「数学の広がり」に続いた話題です.

14. 連立 1 次方程式$\begin{cases} 3x+4y=-1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$を掃き出し計算法により解きなさい.

補足 1：W|A で「{{3,4,-1},{2,-1,3}}の掃き出し法」と入力.

補足 2: 連立方程式 $\begin{cases} 3x+4y=-1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ を行列の方程式で表すと

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ です．この時$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$は，未知変数としてわかっているのでいちいち式に書くのは面倒です．そこで省略して$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$と書いてしまいま

す．これを拡大係数行列と言います．書き方のルールが決まっていればいつでも連立方程式に書き戻すことができます．この拡大係数行列に対して掃き出し法を用います．そのとき，W|A の結果は$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$と出力されます．これは解が$(x,y)=(1,-1)$ということを表しています．この理由を次に説明します．$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}, \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}$とすると，拡大係数行列は$\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b})$と書けます．次に$\mathbf{A}$の逆行列$\mathbf{A}^{-1}$をこの拡大係数行列の左から掛けると$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b})=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\ \ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})=(\mathbf{E}\ \ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})$となり，連立方程式の解$\boldsymbol{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$が基本変形を用いた掃き出し法の結果の拡大係数行列$(\mathbf{E}\ \ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b})$の右側に出てくるのです．

補足 3：W|A で「3x+4y=-1,2x-y=3」と入力し，表示結果の ステップごとの解説 をクリックすると解法が選択できます．ここで「ガウスの消去法」を選択すると指示された解法で解けます．

15．連立 1 次方程式$\begin{cases}x+4y+3z=1\\ 2x+7y+3z=3\\ y+4z=-1\end{cases}$を掃き出し計算法により解きなさい．

補足：W|A で「{{1,4,3,1},{2,7,3,3},{0,1,4,-1}}の掃き出し法」または「x+4y+3z=1 , 2x+7y+3z=3 , y+4z=-1」．

解法は前問と同様です．ここでは，行列 **A** と拡大係数行列(**A b**)の階数(rank)に注目してみると，rank(**A**)=rank(**A b**)=3 となっているため，一つの解が求まったのです．独立な方程式の数と未知数の数が一致し解が求まる，という条件が満たされたと言えます．

16．連立 1 次方程式$\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+2y+2z=1\end{cases}$は解がないことを確認しなさい．

補足：W|A で「{{1,1,1,2},{2,2,2,1}}の掃き出し法」です．問 14, 15 の補足から，連立方程式の解の存在は rank(**A**)と rank(**A b**)を調べることで求まり，同じ階数のとなっていれば解が求まるというものでした．この問の例では，拡大係数行

列が$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$となり，rank (**A**)=1,rank(**A b**)=2 となっているため解が存在しないことが確認できました．この解の存在判定法から，一般に連立方程式に対応する行列 **A** の階数と拡大係数行列(**A b**)の階数をそれぞれ求め，比較することで方程式の解の存在判定ができることが分かります．

17．連立 1 次方程式$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$の自明でない解を求めなさい．

補足 1：W|A で「{{1,-2,1,0},{2,5,1,0},{4,1,3,0}}の掃き出し法」．

補足 2：W|A の結果$\begin{pmatrix}1 & 0 & 7/9 & 0\\ 0 & 1 & -1/9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$より，rank(**A**) = rank(**A b**) = 2< 3 となっているため，自明でない解をもつことがわかります．この結果を連立方程式の形で表すと$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{9}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{9}x_3 = 0 \end{cases}$となり，$x_2 = \alpha$(α は任意) とすると，$(x_1, x_2, x_3) = (-7\alpha, \alpha, 9\alpha)$と表せます．もちろんここで任意の α は$x_1, x_2, x_3$のいずれに指定して解いても構いません．つまり$x_1 = \beta$($\beta$は任意)として解を表すと，$(x_1, x_2, x_3) = (\beta, 7\beta, -9/7\beta)$となります．どちらも正しいのです．

補足 3：連立方程式で **b=0** の場合は **A*x*=0** となります．ここで **0** は列ベクトルです．注意しましょう．このとき明らかに ***x*=0** は **A*x*=0** を満たす解です．この ***x*=0** を解かなくともわかる自明な解と言います．補足 2 の自明でない解は，**A*x*=0** を満たす$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$の解を意味します．経験から知っているように，独立な方程式の数が未知数より少ない時に求まる解です．自明でない解の表し方が苦手な人が多いのでここで理解しておきましょう．

18．次の連立 1 次方程式を解きなさい．このとき拡大係数行列を用いて解く基本変形の過程も書きなさい．

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_3 = 14 \\ 4x_1 + x_2 - 7x_3 = -9 \end{cases}$,　(2) $\begin{cases} -x + y + z + w = 1 \\ x - y + z + w = 2 \\ x + y - z + w = 3 \\ x + y + z - w = 4 \end{cases}$

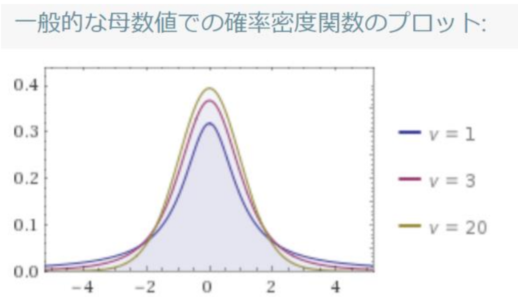
2-7-3 確率・統計

19. 次のデータ列 {1,2,4,1,2,4,3,2,3,3} の分散(variance)と標準偏差(英語は各自調べなさい)を求めなさい.

補足：W|A で「分散」と入力し，その例を理解しましょう.「標準偏差」も同様です.

2-7-4 数学の広がり

20. W|A の入力域内に「error function」,「Gaussian integral」,「normal distribution」を入力しその内容の関係を考察してみましょう.



自由度 ν の t 分布　W|A で「t 分布」.

2-8 W|A を使ってみよう

1. 先の 2-6, 2-7 節の問と同じです．W|A の日本語表示で「科学と技術」の項目の最後の「その他」 をクリックすると，表示画面のタイトルには色々なタイトルが英語で並んでいます．このページ「Science & Technology」の「Physics」「Unit & Measures」，「Computational Sciences」，「Transportation」，「Technological World」，「Space & Astronomy」，「Physical Geography」，「Food Science」，「Chemistry」，「Engineering」，「Earth Sciences」，「Materials」，「Life Sciences」，「Weather & Meteorology」，「Health & Medicine」の中のいずれか 2 つを選び，その 2 つのタイトルの最後にある「More examples」 More examples をクリックし，そのページに表示されたタイトル(見出し)の全てを和訳しましょう．先の 2-6，2-7 節で選ばなかったもの 2 つで答えましょう．日本語訳を知らないものだけ調べ英語と併記しましょう．

2-8-1 微分と積分，1 変数の微分積分の応用

2. 次の曲線の長さを求めなさい．

$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ の $x = -a$ から $x = a$ までの長さ．ただし a は正定数とします．

補足: $x = a$ から $x = b$ までの曲線$y = f(x)$の長さ L は以下の定積分で求められます．

$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx$，また定積分を W|A で実行する方法はこれまでの問で知っています．

3. 問 2 の曲線の長さが $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx$ で求められる理由を説明しなさい．

補足：曲線が$y = f(x)$で与えられている場合です．$\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx$において$dx$をルートの中に入れ，$y = f(x)$も考慮して変形すると$\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$と書けることから，$x$方向に$dx$，$y$方向に$dy$の長さをもつ小さな折れ線を順に足していくことで長さを求めていることが分かります．

4．曲線が次のような媒介変数 t で表されている．$x = a\ \cos t,\ \ y = a\ \sin t,$ $0 \le \mathrm{t} \le \pi$．この曲線の長さ L は $L = a\pi$ である．この事実を定積分を用いて証明しなさい．

補足: 曲線 $x = x(t), y = y(t),\ a \le t \le b$ の長さ L は以下の定積分で求められます．

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\,.$$

5．問 4 の曲線の長さが $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ で求められる理由を説明しなさい．

補足: $x = x(t), y = y(t)$として媒介変数 t により曲線が与えられている場合です．$dx = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)dt,\ dy = \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)dt$とすると問 3 の補足と同じであることが分かります．

6．$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$ を求めなさい．ただし m, n は整数とする．

補足: m=n，$m \neq n$ での場合分けを行う事．W|A で「integrate sin (m*x) *sin(n*x) from x= -π to π」など．

7．$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,dx$ を求めなさい．ただし m, n は整数とする．

補足: W|A で「integrate cos (m*x) *sin(n*x) from x= -π to π」など．

8．$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$ を求めなさい．ただし m, n は整数とする．

9. $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x$ ，また $a_j, b_j, j = 0, \dots, 3$ は定数とする．

9-1．$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

9-2．$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, x\,dx$ を求めよ．

9-3．$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 2x\,dx$ を求めよ．

9-4．$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 3x\,dx$ を求めよ．

補足：問 6～9 は「フーリエ級数，フーリエ解析」の導入です．W|A で「フーリエ級数」とすると関係アプリが起動します．フーリエ(Fourier)は人名です．W|A に「Fourier analysis」などと入力すると関係アプリが起動します．音の分析・合成，波の現象，振動現象，周期性のある現象などに興味のある人はインターネットから，キーワード「フーリエ級数」や「フーリエ解析」，「FFT」等で調べるといいでしょう．FFT は Fast Fourier Transform の略です．

2-8-2 行列

2-3 節で，「逆行列」を知りました．もう一度復習から始めましょう．

10．$(n$行$\times n$列$)$行列，**A** 行と同じ型の単位行列を **E** とする．**AX=XA=E** を満たす行列 **X** を **A** の逆行列といい$\mathbf{A}^{-1}$で表す．

10-1．$(1$ 行 $\times$ 1 列$)$行列 $\mathbf{A} = (a)$ の逆行列$\mathbf{A}^{-1}$を求めなさい．ここで$\mathbf{E} = (1)$, $a \neq 0$.

10-2．$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の逆行列$\mathbf{A}^{-1}$を求めよ．ここで$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$ad - bc \neq 0$.

補足：W|A で「逆行列 {{a,b},{c,d}}」や「inverse {{a,b},{c,d}}」と入力してみます．しかし「ステップごとの解説」はよくわからない逆行列の公式を使うことがあります．そこでまたクリックすると「ガウスの消去法を使う」のメニューがでるので詳しい説明を読みましょう(右図参考)．ただし，得られた $\mathbf{A}^{-1}$が $\mathbf{AA}^{-1}$=$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$=$\mathbf{E}$ を満たすことは簡単な計算から検算できるので，必ず実行して確認します．

2-7-2 で拡大係数行列を知りました．
拡大係数行列を用いて連立方程式の解を求めたことと同じ考え方で逆行列を求める方法があります．

11．行列$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}$が正則か調べ，正則ならば逆行列を求めなさい．

補足 1：W|A の入力例「 {{2,3,4,1,0,0},{1,2,3,0,1,0},{1,3,4,0,0,1}}の行を簡約する」．

補足 2：n 次正方行列が正則か否かを基本変形を利用して判定するには，n 次単位行列を右側に並べた行列$(\mathbf{A}\ \mathbf{E})$を掃き出し法で簡約化することでできます．この簡約化の結果で，もとの$(\mathbf{A}\ \mathbf{E})$の $\mathbf{A}$ のところにできた n 次正方行列が単位行列になれば，この行列は正則で，$(\mathbf{A}\ \mathbf{E})$の $\mathbf{E}$ のところにできた n 次正方行列がその逆行列となります．また$(\mathbf{A}\ \mathbf{E})$の $\mathbf{A}$ のところにできた n 次正方行列の階数が n より小さいとき($<n$)のとき，その行列は正則でない，と判断できます．

補足 3：以上のしくみを行列$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$の例で説明します．

「{{2,3,4,1,0,0},{1,2,3,0,1,0},{1,3,4,0,0,1}}の行を簡約する」を実行し

ステップごとの解説の内容を見ます．はじめに

$(\mathbf{B\,E}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$の拡大行列を作ります．W|A に$(\mathbf{B}\ \ \mathbf{E})$を簡約化させると，掃き出し法を用いて次の結果となりました

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. この行列は$\left(\mathbf{E}\ \ \mathbf{B}^{-1}\right)$に等しい，ということです．

これは次の様に考えます．もし$\mathbf{B}$が逆行列($\mathbf{B}^{-1}$)を持てば，$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B}\ \ \mathbf{E})$を計算すると$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\ \ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}\right) = \left(\mathbf{E}\ \ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}\right) = \left(\mathbf{E}\ \ \mathbf{B}^{-1}\right)$となることです．ここで$(\mathbf{B}\ \ \mathbf{E})$の左の$\mathbf{B}$を $\mathbf{E}$ にする基本変形を行うことは$(\mathbf{B}\ \ \mathbf{E})$に左から$\mathbf{B}^{-1}$を掛ける操作に等しいのです．右の $\mathbf{E}$ はこの基本変形とともに$\mathbf{B}^{-1}$に変形される，ということです．

12．次に示す行列(1), (2)が正則かどうかを判断しなさい．この時判断至った過程を説明しなさい．その後，正則であれば逆行列を求め，その導出過程も書きなさい．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2-8-3 確率・統計，行列

13．　2-3 節の問 22, 23 で 2 つの行列の積を扱いました．ここで復習しておきましょう．初めに $\mathbf{A}$=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ の 2 つの行列を例に考えていきます．ここで例えば，a_{23}は行列$\mathbf{A}$の第 2 行第 3 列の成分を意味します．

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を次のような行ベクトルと列ベクトルの集まりと考えます．

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a1}\\ \boldsymbol{a2}\\ \boldsymbol{a3}\end{pmatrix}, \mathbf{B}=(\mathbf{b1}\quad \mathbf{b2})$，ここで$\mathbf{a1}=(a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13})$,

$\mathbf{a2}=(a_{21}\quad a_{22}\quad a_{23})$, $\mathbf{a3}=(a_{31}\quad a_{32}\quad a_{33})$, $\mathbf{b1}=\begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{pmatrix}, \mathbf{b2}=\begin{pmatrix}b_{12}\\ b_{22}\\ b_{32}\end{pmatrix}$ としま

す．すると積は $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a1}\cdot\mathbf{b1} & \boldsymbol{a1}\cdot\mathbf{b2}\\ \boldsymbol{a2}\cdot\mathbf{b1} & \boldsymbol{a2}\cdot\mathbf{b2}\\ \boldsymbol{a3}\cdot\mathbf{b1} & \boldsymbol{a3}\cdot\mathbf{b3}\end{pmatrix}$ と書けます．ここで例えば$\boldsymbol{a1}\cdot\mathbf{b2}$は，ベクトル$\boldsymbol{a1}$と$\mathbf{b2}$の内積の意味です．つまり 2 つの行列の積からできる行列は，もとの 2 つの行列に含まれるベクトルの内積の全ての組み合わせが成分になります．

共分散行列：さて 2-3 節の問 18，および 2-5 節の問 12 で$\mathbf{A}$の転置行列を ${}^t\mathbf{A}$と書きその定義をしました．この記号を用い共分散行列と呼ばれる積 $\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A}$ を求めてみます．はじめに，${}^t\mathbf{A}=({}^t\boldsymbol{a1}\quad {}^t\boldsymbol{a2}\quad {}^t\boldsymbol{a3})$と書けることに注意します．この表記を用いて

$$\mathbf{A}\,{}^t\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a1}\\ \boldsymbol{a2}\\ \boldsymbol{a3}\end{pmatrix}({}^t\boldsymbol{a1}\quad {}^t\boldsymbol{a2}\quad {}^t\boldsymbol{a3})=$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a1}\,{}^t\boldsymbol{a1} & \boldsymbol{a1}\,{}^t\boldsymbol{a2} & \boldsymbol{a1}\,{}^t\boldsymbol{a3}\\ \boldsymbol{a2}\,{}^t\boldsymbol{a1} & \boldsymbol{a2}\,{}^t\boldsymbol{a2} & \boldsymbol{a2}\,{}^t\boldsymbol{a3}\\ \boldsymbol{a3}\,{}^t\boldsymbol{a1} & \boldsymbol{a3}\,{}^t\boldsymbol{a2} & \boldsymbol{a3}\,{}^t\boldsymbol{a2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a1}\cdot\boldsymbol{a1} & \boldsymbol{a1}\cdot\boldsymbol{a2} & \boldsymbol{a1}\cdot\boldsymbol{a3}\\ \boldsymbol{a2}\cdot\boldsymbol{a1} & \boldsymbol{a2}\cdot\boldsymbol{a2} & \boldsymbol{a2}\cdot\boldsymbol{a3}\\ \boldsymbol{a3}\cdot\boldsymbol{a1} & \boldsymbol{a3}\cdot\boldsymbol{a2} & \boldsymbol{a3}\cdot\boldsymbol{a3}\end{pmatrix}.$$

ここで例えば$\boldsymbol{a2}\cdot\boldsymbol{a2}=|\boldsymbol{a2}||\boldsymbol{a2}|cos(0)=a_{21}{}^2+a_{22}{}^2+a_{23}{}^2$は，

$\boldsymbol{a2}$ベクトル自身の内積で，大きさ$|\boldsymbol{a2}|$の 2 乗の数値(スカラー)です．また 2 つのベクトルの内積は$a\cdot b=b\cdot a$が成り立つため，$\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}$は対称行列で $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}={}^t(\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A})$ が成り立ちます．

ところで「分散」の定義と計算法を復習しておきましょう．W|A に「分散」と入力します．右のアプリが起動します．「分散の形式」には「標本分散」と「母集団の分散」の 2 種の分散の計算が指定できます．ここではデータの数が{1, 2, -2, 4, -3}と少ないので，これらでデータが全てと見なした「母集団の分散」で計算してみます．

ステップごとの解説 からこの分散の定義と計算法が分かります．

定義：$\boldsymbol{X}=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ が全てである n 個のデータにおいて（「母集団」といいます），この平均がμであるとき，この母集団の「分散」を記号$\mathrm{V}(\boldsymbol{X})$を用い，$\mathrm{V}(\boldsymbol{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ と定義します．

また別のデータ$\boldsymbol{Y}=\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$（$X_1$は$Y_1$と，$X_2$は$Y_2$と，…というように添え字に従って対応したデータである）の平均がλであるとき，この分散を$\mathrm{V}(\boldsymbol{Y})$とし，$\mathrm{V}(\boldsymbol{Y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\lambda)^2$ とします．この 2 つの$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$のデータから次のような分散（共分散）が定義できます．$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(Y_i-\lambda)$．共分散は，大きな正の値を取れば，$X_i$の値が大きいほど$Y_i$の値は大きくなる傾向があることを示します．逆に大きな負の値を取れば，X_iの値が大きいほどY_iの値は小さくなる傾向があることを示します．つまり共分散は対応する 2 組のデータの傾向を算出することができます．しかし，共分散にはある欠点があり，その欠点を克服して解釈しやすいように表現したものが「相関係数」となっています．

補足：共分散の特別な場合$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(X_i-\lambda)$が，分散$\mathrm{V}(\boldsymbol{X})$となることもわかります．

14．上記に示した，共分散を用いて対応する 2 組のデータを評価する際のある欠点とは何か考えなさい．

補足：相関係数の定義における計算過程や，相関係数の性質を考えるとよい．

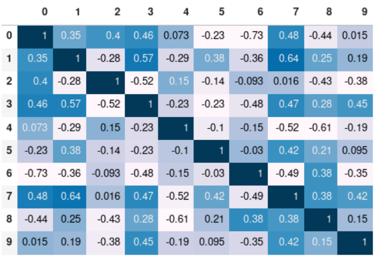
最後にデータ分析で多用され重要な共分散行列の紹介をします．いま，先の分散のデータとして 3 種のデータ$\boldsymbol{X} = \{X_1,X_2,X_3\}$，$\boldsymbol{Y} = \{Y_1,Y_2,Y_3\}$，$\boldsymbol{Z} = \{Z_1,Z_2,Z_3\}$を行ベクトルとする$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} \end{pmatrix}$を考えます．それぞれのデータ数は($n$=)3 です．また$\boldsymbol{X}$の平均が$\mu_X$，$\boldsymbol{Y}$の平均が$\mu_Y$，$\boldsymbol{Z}$の平均が$\mu_Z$とします．$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} X_1-\mu_X & X_2-\mu_X & X_3-\mu_X \\ Y_1-\mu_Y & Y_2-\mu_Y & Y_3-\mu_Y \\ Z_1-\mu_Z & Z_2-\mu_Z & Z_3-\mu_Z \end{pmatrix}$とし

$\mathrm{V}(\{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\})=\frac{1}{n}\mathbf{A}\ {}^{t}\mathbf{A}$ をデータ$\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\}$による「共分散行列」と言います．非常に役立つ行列のため共分散行列の定義や応用はインターネット上でも色々紹介されているので調べるといいでしょう．機械学習や脳波信号の解析などにも使われています．

補足：2-5 節で転置行列を紹介しました．2 つの積が定義できる行列$\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$の積$\mathbf{AB}$の転置行列は，関係 ${}^{t}(\mathbf{AB})= {}^{t}\mathbf{B}\ {}^{t}\mathbf{A}$ で計算もできます．別の本などでは$\mathrm{V}(\{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\}) = \frac{1}{n}\ {}^{t}\mathbf{A}\,\mathbf{A}$ と定義しているものもあります．これは ${}^{t}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} X_1-\mu_X & X_2-\mu_X & X_3-\mu_X \\ Y_1-\mu_Y & Y_2-\mu_Y & Y_3-\mu_Y \\ Z_1-\mu_Z & Z_2-\mu_Z & Z_3-\mu_Z \end{pmatrix}$ と以上の例を読み替えれば同じことだと分かります．データの並べ方の定義が違うためです．

2-8-4 数学の広がり

15．少なくとも 2 つ以上の共分散行列の応用例を調べなさい．英語表記は「Covariance matrix」です．できればネット検索する際には英語のキーワードを使用しなさい．



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0.35	0.4	0.46	0.073	-0.23	-0.73	0.48	-0.44	0.015
1	0.35	1	-0.28	0.57	-0.29	0.38	-0.36	0.64	0.25	0.19
2	0.4	-0.28	1	-0.52	0.15	-0.14	-0.093	0.016	-0.43	-0.38
3	0.46	0.57	-0.52	1	-0.23	-0.23	-0.48	0.47	0.28	0.45
4	0.073	-0.29	0.15	-0.23	1	-0.1	-0.15	-0.52	-0.61	-0.19
5	-0.23	0.38	-0.14	-0.23	-0.1	1	-0.03	0.42	0.21	0.095
6	-0.73	-0.36	-0.093	-0.48	-0.15	-0.03	1	-0.49	0.38	-0.35
7	0.48	0.64	0.016	0.47	-0.52	0.42	-0.49	1	0.38	0.42
8	-0.44	0.25	-0.43	0.28	-0.61	0.21	0.38	0.38	1	0.15
9	0.015	0.19	-0.38	0.45	-0.19	0.095	-0.35	0.42	0.15	1

縦の項目と横の項目の関係の強さを示す数字で埋めた相関行列.