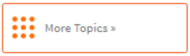
2-5 W|A を使ってみよう

1. まず W|A のトップページを日本語表示から P. 14 で紹介した言語表示の切り替え設定で， English 表示に切り替えます．以下の課題で知らない英語表現があれば，その表現のみ日本語訳を調べ英語と併記しましょう．

W|A の英語表示で「Mathematics>」の項目の最後の「More Topics」 

をクリックすると，表示画面のタイトルには「Elementary Math, Algebra, …, Probability」が表示されます．また，日本語表示で「数学」の項目の最後の「その他」 

をクリックすると，表示画面のタイトルには色々なタイトル「・・・・」が表示されます．この 2 つのページにおいて英語と日本語でのタイトルの構成や違いを見つけ，簡単にその違いを述べなさい．またこの違いに関し考察しなさい．

補足：言語表示の切り替えは，そのページ毎においても P. 14 で紹介した方法で言語表示切り替えができます．

2-5-1 微分と積分

2. 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標(x,y)が$x = r\ \cos\omega t$, $y = r\ \sin\omega t$ で表わされるとき，点 P の速さと加速度の大きさを求めなさい．ここでr とωは定数です．

3. 先の問 2 の場合に点 P での速度ベクトルと加速度ベクトルは垂直である（互いに垂直な方向関係にある）ことを示しなさい．

4. $|h|$ が十分に小さい時，$\cos(a+h)$ を h の 1 次式で近似しなさい．

補足：W|A で，「級数 cos(x), x=a, 1 次まで」としてその結果を$a+h=x$ つまり$x-a=h$と考えることでも求まります．他に「テイラー展開」と入力して計算アプリを起動しても実行できます．右図参考を参考にしましょう．

5．$|h|$ が十分に小さい時，$\log(1+h)$ を h の 2 次式で近似しなさい．

解答： $f(1+h)=\log(1+h)$ と考えると $f(1+h)\approx f(1)+f'(1)h+f''(1)h^2/2$ となります．

6．次の不定積分を求めなさい．

$$\int x\sqrt{2x+1}\,dx$$

補足 1： $\sqrt{2x+1}=t$ として変数変換を用いた不定積分を行う．

補足 2：W|A で「積分」と入力して計算アプリを起動しても実行できます．右図参考．ステップごとの解説 を参考にするといいでしょう．

7．次の不定積分を求めなさい．$\int x\sin x\ dx$

8．次の不定積分を求めなさい．$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$

9. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ となることを示し，次の不定積分を求めなさい．$\int \sin^2 x\, dx$

10．次の定積分を求めなさい．$\int_0^2 |2x-1|dx$

補足： $\int_0^2 |2x-1|dx = \int_0^{1/2}(1-2x)dx + \int_{1/2}^2 (2x-1)dx$ として計算します．

2-5-2 行列

11．$5\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$を計算しなさい．

補足：行列のスカラー(数値)倍は各成分をスカラー倍します．

12．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$の転置行列を求めて，さらにその転置行列を求めなさい．

補足：行列の転置行列とは，第 i 行第 j 行の要素を第 j 行第 i 行の要素と交換した行列を言います．転置は英語で **transpose** です．例えば

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{pmatrix}$の転置行列は，記号 ${}^t\mathbf{A}$を用いて ${}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{pmatrix}$ です．

2-3 節の「ベクトルから行列へ」を見直しましょう．転置行列は列ベクトルと行ベクトルの並び方を変えたものと見なせます．W|A では，「{{1,2,3},{4,5,6},{7,8,9}}の転置行列の転置行列」で実行できます．転置行列の転置行列は元の行列と等しくなることが確認できます．

13．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$は対称行列か確認しなさい．

補足： ${}^t\mathbf{A} = \mathbf{A}$ を満たすとき，この行列$\mathbf{A}$を「対称行列」といいます．

W|A の入力例は，「{{1,0,4}, {0,2,-1},{4,-1,3}}は対称行列ですか？」

14．行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$は交代行列か確認しなさい．

補足： ${}^{t}\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ を満たすとき，この行列Aを「交代行列」といいます．

W|A の入力例は，「{{0,1,2}, {-1,0,3},{-2,-3,0}}は反対称行列ですか？」

「交代行列」は W|A では「反対称行列」という言葉で表現して使います．

15．2 行 2 列の 2 つの行列$\mathbf{A}$と$\mathbf{B}$の積$\mathbf{AB}$について， ${}^{t}(\mathbf{AB}) = {}^{t}\mathbf{B}\ {}^{t}\mathbf{A}$となることを，色々な 2 行 2 列の 2 つの行列の積で確かめなさい．

補足： ${}^{t}(\mathbf{AB}) = {}^{t}\mathbf{B}\ {}^{t}\mathbf{A}$は一般的に n 行 n 列の 2 つの行列の積でも成り立ちます．

16．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$に逆行列 $\mathbf{X}$ が存在するか確認しなさい．

補足：W|A の入力例は，「{{1,0}, {1,0}}の逆行列」や「{{1,0}, {1,0}}^(-1)」

W|A の結果表示には 「これは特異行列です」と表示され，つまり逆行列をもたないということがわかります．W|A の結果表示から，特異行列であると表示→逆行列をもたない→(その行列が)正則でない，W|A の結果表示から，逆行列が出力→逆行列をもつ→(その行列が)正則である，と判断できます．

17．行列$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$の 1 乗，2 乗，3 乗を求めなさい．

補足：W|A の入力例は，「 {{0,1,0}, {0,0,1},{0,0,0}}^1 」，

「{{0,1,0}, {0,0,1},{0,0,0}}^2」，「{{0,1,0}, {0,0,1},{0,0,0}}^3」

3 乗を求めるとゼロ行列となるため，3 乗以降はすべてゼロ行列になります．どのような行列が，何度も掛けると 0 行列になる性質を持つのか自分で色々試してみましょう．

2-5-3 確率・統計，基本統計量

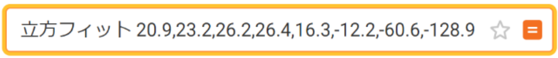
18. 以下をたどり，そこにある色々な例を実行してみましょう．

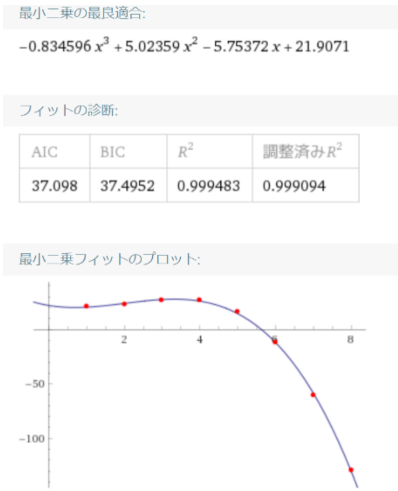
W|A トップページ→「ステップごとの解説」→「統計」＋「もっと表示」，

W|A トップページ→「高等数学　数学」→「数学 I」と「数学 A」，

W|A トップページ→「統計」．

例えば，5 つの数値からなるデータ{1, 2, -2, 4, -3}の平均は，W|A 入力の「平均　{1, 2, -2, 4, -3}」や「{1, 2, -2, 4, -3}の平均」で求まり 0.4 です．「分散　{1, 2, -2, 4, -3}」，「標準偏差　{1, 2, -2, 4, -3}」，「{1, 2, -2, 4, -3}の中央値」も理解できます．「{1, 2, -2, 4, -3}」だけ入力すると，データのプロットと共に基本的な統計量を結果表示します．





W|A で，数値データを
３次の多項式で近似した例．

2-6 W|A を使ってみよう

1. W|A の日本語表示で「科学と技術」の項目の最後の「その他」 をクリックすると，表示画面のタイトルには色々なタイトルが英語で並んでいます．このページ「Science & Technology」の「Physics」「Unit & Measures」，「Computational Sciences」,「Transportation」,「Technological World」,「Space & Astronomy」,「Physical Geography」，「Food Science」，「Chemistry」，「Engineering」，「Earth Sciences」，「Materials」，「Life Sciences」，「Weather & Meteorology」，「Health & Medicine」のの中からいずれか 2 つを選び, その 2 つのタイトルの最後にある「More examples」 More examples をクリックし，そのページに表示されたタイトル(見出し)の全てを和訳しましょう．例えば「Physics」の「More examples」を表示した場合は,「Mechanics, Statistical Physics, Electricity & Magnetism, Relativity, Quantum Physics, Astrophysics, Physical Principles, Oscillations & Waves, Thermodynamics, Optics, Nuclear Physics, Particle Physics, Physical Constants, Fluid Mechanics」の日本語訳をします．日本語訳を知らないものだけ調べ英語と併記しましょう．

2-6-1 微分と積分

2. $y = f(x)$ の$x = a$ の近くを点$(a, f(a))$ における接線で近似するのが，1 次の近似式

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h \qquad (1)$$

です．これに対して$f(a) = g(a), f'(a) = g'(a), f''(a)=g''(a)$ を満たす 2 次関数 $g(x) = r + qx + px^2$ によって$x = a$ の近くを近似する．すなわち $f(a+h) \approx g(a+h)$ とみることにより次の近似式が得られます．

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 \qquad (2)$$

この関係式を$y = f(x)$ の$x = a$ の近くでの 2 次の近似式といいます．

補足：先の 2-5 節での問 4, 5 も同じ考え方です．

2-1. $y = sin(x)$ の$x = a$ の近くでの 1 次の近似式と 2 次の近似式を求めましょ

う.

2-2. $y = log(x)$ の$x = 0$ の近くでの 1 次の近似式と 2 次の近似式が求められないことを説明し, $y = log(1 + x)$ の$x = 0$ の近くでの 1 次の近似式と 2 次の近似式を求めましょう.

2-3. 2-1, 2-2 で求めた近似式を用い, $sin(0.5)$および$log(0.9)$それぞれの 1 次近似値と 2 次近似値を求めましょう. また W|A で得られる値と比較してみましょう.

2-4. (2)式を誘導しましょう.

2-5. $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + ?$　　(3)

の ? の部分を求めましょう. ただし式(3)は$y = f(x)$ の$x = a$ の近くの点$(a, f(a))$ における 3 次の近似式とします.

3. $(\sin x)^3$の不定積分を求めなさい.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$ を求めなさい.

5. $F(x) = \int_0^x (x - t) \sin t \, dt$ のxによる微分を求めなさい.

補足 : W|A で「 integrate (x − t) ∗ sin(t) from t = 0 to t = x 」を実行してみましょう. また付録 2, 3 の入力例も参考になります.

6. $x^5 + 9x^4 - 11x^3 - 201x^2 - 62x + 840$ を因数分解しなさい.

補足 : この関数のグラフを描くには W|A で「$(x^5 + 9x^4 - 11x^3 - 201x^2 - 62x + 840)$」を実行してみるといいでしょう. 他に色々な情報が表示されます. 参考にしましょう.

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2$ を求めなさい.

補足: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は W|A で「(1/n)^2　の n=1 から infinity　までの和」や「sum(1/n)^2, n=1 to infinity」と入力，ここで infinity は代わりに ∞と入力もできます．

2-6-2 行列

8. (4 行 × 4 列)行列 **B** を，(4 行 × 1 列)列ベクトル$\begin{pmatrix} A \\ T \\ G \\ C \end{pmatrix}$に左からかけた積 **B**$\begin{pmatrix} A \\ T \\ G \\ C \end{pmatrix}$が$\begin{pmatrix} A \\ T \\ G \\ C \end{pmatrix}$となりました．つまり **B**$\begin{pmatrix} A \\ T \\ G \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ T \\ G \\ C \end{pmatrix}$．この行列 **B** を成分表示しなさい．

また(4 行 × 4 列)行列との積は **C**$\begin{pmatrix} A \\ T \\ G \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ A \\ G \\ C \end{pmatrix}$をとなりました．行列 **C** を成分表示しなさい．また **D**$\begin{pmatrix} T \\ A \\ G \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ T \\ G \\ C \end{pmatrix}$となる行列 **D** を成分表示しなさい．

9. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$を階段行列に変形し，階数を求める過程を調べなさい．

補足 1：W|A で「{{1,2,1}, {2,3,5}}の行を簡約化する」と入力すると，階段行列にすることで簡約化されます．このとき，出力には階数(0 を含まない行数)も表示されます．

補足 2：W|A で「{{1,2,1}, {2,3,5}}の階数」と入力すると良いでしょう．
このように指定すると「階数」が出力でき，ステップごとの解説 で階段行列への変形の確認ができます．

補足 3：行列 **A** の階数を，行列 **A** のランク(rank)とも言い，記号で rank(**A**)と書きます．

補足 4：W|A で「{{1,2,1}, {2,3,5}}の掃き出し法」と実行してみます．
「掃き出し法計算機」と入力することで，以下のように行列を入力するフォー

マットを表示することもできます．

補足 4：「階段行列」や「階数」は行列の性質を調べるときに基本的な情報となります．

10．単位行列の行や列を入れ換えた行列を左から別の行列 **(A)**に掛け，別の行列を作る操作は「行列の基本変形」と呼ばれるものの 1 つです．例えば次の行列$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & a & x\\ 2 & b & y\\ 3 & c & z\end{pmatrix}$に対して，**A** の 1 行と 3 行の成分を入れ替えたいとき，以下のように単位行列の 1 行目と 3 行目を入れ替えたものを左から掛けることで得られます，$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & x\\ 2 & b & y\\ 3 & c & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & c & z\\ 2 & b & y\\ 1 & a & x\end{pmatrix}$.

W|A の ステップごとの解説 を用い上の例がどのように計算されたかを調なさい．

補足：W|A の入力例，「{{0,0,1},{0,1,0},{1,0,0}}{{1,a,x},{2,b,y},{3,c,z}}」

11．問 10 の行列 **A** の 1 行目を 2 倍し，また 2 行目と 3 行目を入れ替える行列 **B** を求めなさい．また ステップごとの解説 を用い，**BA** がこの操作になるか確認しなさい．

12．以下の(1)~(3)の行列の階数を求めなさい．またその誘導過程をそれぞれ手計算でも確認しなさい．

(1) $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$,　(2) $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(3) $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

13．以下の(1)~(3)の行列の階数を求めなさい．またその誘導過程をそれぞれ手計算でも確認しなさい．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$,　(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{pmatrix}$,　(3) $C = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a+1 & a+1 & a+1 \\ a+1 & a+2 & a+3 \end{pmatrix}$.

補足：(1)~(3)の行列が正則かどうか(正則行列＝逆行列を持つ行列)をこの階数で判別できます．その行列が正則の場合は，その基本変形後の行列の階数がもとの行列の行数及び列数に一致します．

例：$n \times n$ の行列の場合，その行列の階数が n であればこの行列は正則です．

2-6-3 確率・統計

14．W|A で「correlation coefficient」と入力し，その解説から correlation coefficient を説明しなさい．

補足 1：将来，実験結果のデータ分析をする人は出会うものです．

補足 2：correlation coefficient は解説で表示されるグラフの傾きではありません．

2-6-4 数学の広がり

15．問 7 において $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^a$ の a に色々な値を入力しその内容を考察しなさい．

16．問 9 の補足 3 における「掃き出し法」とは何か調べて理解しておきましょう．また Gaussian elimination（ガウスの消去法）も調べて説明でき，利用できるようにしておきましょう．これらの方法は，未知数が非常に多い連立 1 次方程

式の解法の理解に役立ちます．

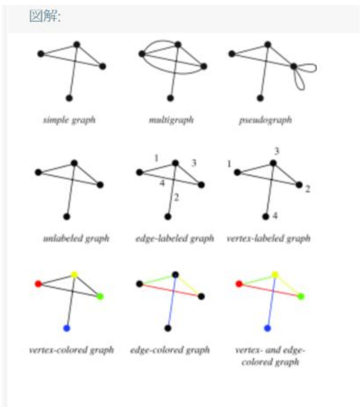
補足：簡単な連立 1 次方程式は，W|A で「連立 1 次方程式」として起動するアプリで解くことができます．

ここで連立 1 次方程式とその行列表現の対応例を示します．こうして連立 1 次方程式の解法は，行列による方程式の解法と考えても同じであることがわかります．行列で一度に数字を扱う便利さがわかる例です．

連立 1 次方程式：$\begin{cases} a+x-3y+z=2 \\ -5a+3x-4y+z=0 \\ a+2y-z=1 \\ a+2x=12 \end{cases}$

上記連立 1 次方程式の行列での表現：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$

ここで　$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ のように，太文字でベクトルや行列を表すと，行列による連立 1 次方程式は $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ という非常に簡潔な表示となります．



W|A で「graph」の実行結果です．