

== 指数関数(2) ==

スマホ画面の横幅が、教材の横幅と少し合わないときは、リンクの掛かっている文字 [例えばこの文字] をトントンとたたくと合うようです (ダブルクリック, ダブルタップ)

○ 指数関数のグラフ

$y=2^x$, $y=3^x$ などのように指数の部分が変数になっているものを指数関数という。

$y=a^x$ は a を底とする指数関数と呼ばれる。

$y=2^x$ のグラフは右図1のようになる。

また, $y=3^x$ のグラフは右図2のようになる。

一般に, $y=a^x$ ($a>1$) のグラフは

- i) $x=0$ のとき $y=1$ となる。
※どの指数関数のグラフも $(0, 1)$ を通る。
- ii) $x \rightarrow -\infty$ のとき $y \rightarrow 0$ となる。
※ $y \rightarrow -\infty$ ではない。
- iii) 右上がり, 単調増加関数となる。

$y=a^x$ ($0<a<1$) のグラフは, 図3のように右下がり (単調減少関数) となり, 幾つかの a の値に対して $y=a^x$ のグラフを重ねて描くと, 図4のようになる。

図3

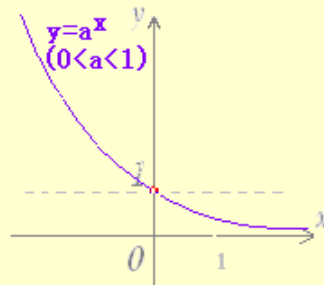
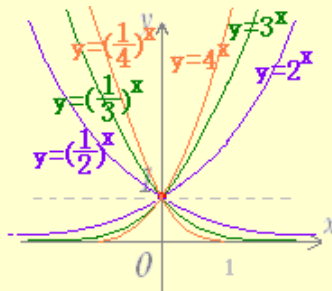


図4

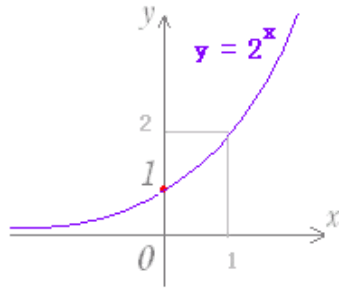


(初歩的な注意)

2次関数 $y=x^2$ と, 指数関数 $y=2^x$ とは全く異なる関数であるので注意すること

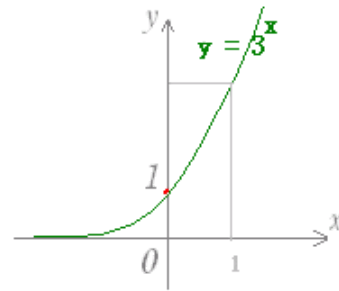
図1

x	y
...	...
-4	1/16
-3	1/8



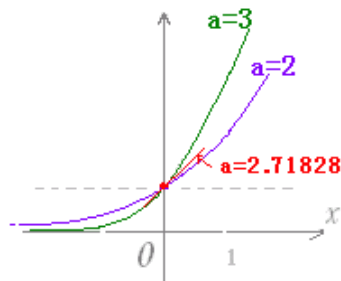
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
...	...

図2



x	y
...	...
-4	1/81
-3	1/27
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
...	...

※ $x=0$ における接線の傾きが、ちょうど1となる底の値は自然対数の底と呼ばれ $e=2.71828\dots$ となる。



○ 指数関数の微分

【 要点 】

(1)

i) $y = e^x \rightarrow y' = e^x$
 (ここに e は自然対数の底 $2.71828\dots$)

ii) $y = e^{kx} \rightarrow y' = ke^{kx}$

(2) $y = a^x \rightarrow y' = a^x \log a$

(続き)

[解説] 合成関数の微分法(*1)により、

(1) $y = a^{ax}$ を導関数の定義に従って微分すると

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(a^{x+h}) - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h}$$

$$t=kx$$

$$=a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x f'(0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^t \cdot k = ke^{kx}$$

(2) 指数関数の導関数(※2)だから、を掛ければ得られる)

図4において $x=0$ における接線の傾きが $y' = \log a \cdot e^{x \log a} = a^x \log a$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

(※1)の補足説明

となる定数 a は「自然対数の底」と呼ばれ、

$a=2.71828 \dots$ となる数で、指数関数、対数関数で非常に重要な働きをする。この数を e で表わす。

すなわち、 $e=2.71828 \dots$ のとき

を合成して $f(x)$ が得られるとき、 y を x で微分した場合は、 $y=e^x \rightarrow y'=e^x$

※ 対数関数の微分を先に習った場合：

で得られる \rightarrow これを合成関数の微分法という。

$$y=e^x \rightarrow x=\log y$$

(※2)の補足説明

逆関数の微分法を用いると両辺の対数をとると

$$x \log a = y \log b$$

$$y \frac{dx}{dy} = x \log a \log b = x \frac{dy}{dx} \log a \log b = e^x$$

$$a^x = e^y \quad \text{とおくと, } y = x \log a$$

例と答

次の関数を微分せよ。

$$(1) y=e^{2x} \rightarrow y'=2e^{2x}$$

$$(2) y=e^{-3x} \rightarrow y'=-3e^{-3x}$$

$$(3) y=10^x \rightarrow y'=10^x \log 10$$

$$(4) y=xe^x \rightarrow y'=(x+1)e^x$$

$$(5) y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \rightarrow y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$(6) y = e^{-x^2} \rightarrow y' = -2x e^{-x^2}$$

[参考]

$$(1) y = e^{kx} \rightarrow y' = ke^{kx} \quad \text{において } k=2 \text{ とする.}$$

$$(2) y = e^{kx} \rightarrow y' = ke^{kx} \quad \text{において } k=-3 \text{ とする.}$$

$$(3) y = a^x \rightarrow y' = a^x \log a \quad \text{において } a=10 \text{ とする.}$$

(4) 積の微分法を用いる。

$$y=f(x)g(x) \rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

(5) 商の微分法を用いる。

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(6) 合成関数の微分法を用いる。

$$y = e^t, \quad t = -x^2 \text{ として}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

■ 即答問題 ■

次の関数を微分せよ.

(1) $y = e^{5x} \rightarrow y' = \square e^{\square x}$

(2) $y = e^{-6x} \rightarrow y' = \square e^{\square x}$

(3) $y = 2^x \rightarrow y' = \square^x \log \square$

Check Reset

(4) $y = x^2 e^x \rightarrow y' = (x^2 + \square x) e^x$

(5) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \rightarrow y' = \frac{\square e^x}{(e^x + 1)^2}$

(6) $y = e^{2x+1} \rightarrow y' = \square e^{2x+1}$

Check Reset