

== 不定積分 ==

○ はじめに

例

x^2 を微分すると $2x$ になるが, x^2+1 , x^2+2 , x^2+3 , ... の微分も $2x$ となる.

一般に, 微分して $2x$ となる元の関数は, x^2+C (C は任意定数) と書ける.

このとき, $2x$ の不定積分は, x^2+C であるといい,

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

と書く.

(任意定数が定まらないので, 不定積分と呼ばれる.)

○ 不定積分

一般に, $F'(x)=f(x)$ のとき, 微分して関数 $f(x)$ となる元の関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数といい,

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

を $f(x)$ の不定積分という.

すなわち, $F'(x)=f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + C$

※高校の教科書では, $F'(x)=f(x)$ のとき, $F(x)$ を $f(x)$ の (1つの) 原始関数といい, 任意定数 C を付けた式 $F(x)+C$ を不定積分ということが多い.

※また, 他方で

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

を原始関数または不定積分と定義して, 原始関数と不定積分を全く同じ意味に用いる教科書もある.

○ 不定積分の公式

次の各微分公式から, 不定積分の公式が得られる. (これらの公式は, 不定積分を微分すれば証明できる.)

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1} \rightarrow \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad \dots(1)$$

(ただし, $a \neq 0$ とする)

$$\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x} \rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C \quad \dots(2)$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \rightarrow \int e^x dx = e^x + C \quad \dots(3)$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a \rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad \dots(4)$$

(ただし, $a > 0, a \neq 1$)

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + C \quad \dots(5)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \rightarrow \int \cos x dx = \sin x + C \quad \dots(6)$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \dots(7)$$

例

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \Leftrightarrow \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \Leftrightarrow \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \Leftrightarrow \int e^x dx = e^x + C$$

例

(1) 無理関数の不定積分は有理指数 (分数の指数) に直せば計算できる.

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{3}} x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{5}{3} x \sqrt[3]{x^2} + C$$

(2) 分数関数の不定積分では, 部分分数分解の利用も考える.

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \log|x| - \log|x+1| + C = \log \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$

(3) 三角関数の積や累乗の不定積分では, 積を和に直すことを考える.

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \dots(8)$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \dots(9)$$

また, $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$ のとき次の公式が成り立つ.

$$\frac{d}{dx}\{F(x)+G(x)\} = f(x)+g(x) \rightarrow$$

$$\int \{f(x)+g(x)\} dx = F(x)+G(x)+C \dots(i)$$

$$\frac{d}{dx}\{kF(x)\} = kf(x) \rightarrow$$

$$\int \{kf(x)\} dx = kF(x)+C \dots(ii)$$

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos 3x dx &= \int \frac{1}{2} \{ \sin 4x + \sin(-2x) \} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} \right) + C \\ &= \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 4x}{8} + C \end{aligned}$$

短答問題

次の空欄を埋めよ。(半角数字で!)

(1) $\int x\sqrt{x} dx = \frac{\square}{\square} x^{\square} \sqrt{x} + C$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \square \sqrt{x} + C$

(3) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{\square} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

(4) $\int \frac{1}{x(x+2)} dx = \frac{1}{\square} \log \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$