→ スマホ版は別頁

=積の微分法，商の微分法，合成関数，逆関数の微分法=

○　はじめに

　このページでは，個々の関数の微分が分かるときに，それらの関数の積，商，合成関数，逆関数で表わされる関数の微分を求める方法を学ぶ.

○　積の微分法

　関数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の導関数が分かっているとき，これらの関数の積 $y=f(x)g(x)$ の導関数を $f(x)$，$g(x)$，$f'(x)$，$g'(x)$ で表わす公式を求める.

◇積の微分法の公式◇

$$\boxed{y=f(x)g(x) \rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$$

◇これを用いれば３個の積についても，公式を作ることができる.

$$\boxed{y=fgh \rightarrow y'=f'gh+fg'h+fgh'}$$

（∵　$(fgh)'=(fg)'h+(fg)h'=(f'g+fg')h+(fg)h'$
　　$=f'gh+fg'h+fgh'$）

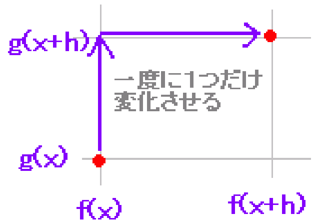
（必要となる場面）

(1) $y=x+1$ の微分は $y'=1$，$y=x^2+1$ の微分は $y'=2x$
　‥それでは，$y=(x+1)(x^2+1)$ の微分は？

(2) $y=x$ の微分は $y'=1$，$y=x^2+1$ の微分は $y'=2x$
　‥それでは，$y=\dfrac{x}{x^2+1}$ の微分は？

(3) $y=x^3$ の微分は $y'=3x^2$，$y=x^2+1$ の微分は $y'=2x$
　‥それでは，$y=(x^2+1)^3$ の微分は？

（証明）



$p(x)=f(x)g(x)$ とおくと.

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$
$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

例と答

(1)　$y=x$ の微分は $y'=1$，$y=x^2$ の微分は $y'=2x$ であるから，$y=x\cdot x^2$ すなわち $y=x^3$ の微分は
$y'=1\cdot x^2+x\cdot 2x = x^2+2x^2 = 3x^2$

(2)　$y=x$ の微分は $y'=1$，$y=x^3$ の微分は $y'=3x^2$ であるから，$y=x\cdot x^3$ すなわち $y=x^4$ の微分は
$y'=1\cdot x^3+x\cdot 3x^2 = x^3+3x^3 = 4x^3$

(*)　一般に，$1\leqq k\leqq n$ となる整数 k について，
$y=x^k$ について $y'=kx^{k-1}$ が成り立つならば，
$y=x^{k+1}$ の微分は
$y'=(x\cdot x^k)'=1\cdot x^k+x\cdot kx^{k-1}=x^k+kx^k=(k+1)x^k$
となるから，すべての正の整数 n について，
$(x^n)'=nx^{n-1}$　‥‥[重要公式]
の別の証明が得られたことになる.（前のページで示した証明は，二項展開を用いる証明）

(4)　$y=(x^2+1)(x^3+1)$ の微分を求めよ.

$y'=2x(x^3+1)+(x^2+1)3x^2$
$=2x^4+2x+3x^4+3x^2$
$=5x^4+3x^2+2x$

y を展開してから行ってもよい.
$y=x^5+x^3+x^2+1$
$y'=5x^4+3x^2+2x$

(5)　$y=x(x+1)(x+2)$ の微分を求めよ.

$y'=(x+1)(x+2)+x(x+2)+x(x+1)$
$=x^2+3x+2+x^2+2x+x^2+x$
$=3x^2+6x+2$

y を展開してから行ってもよい.
$y=x^3+3x^2+2x$
$y'=3x^2+6x+2$

(2)　$y=(x+1)(x+2)(x+3)$

■短答問題■

　次の関数の導関数を求めよ.

(1)　$y=(2x^2+3)(3x^2+4)$

$= \square x^3 + \square x$

Check Reset

$= \square x^2 + \square x + \square$

Check Reset

○　商の微分法

関数 $y=f(x)$， $y=g(x)$ の導関数が分かっているとき，これらの商

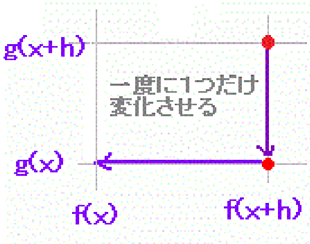
$$y=\frac{f(x)}{g(x)}$$

の導関数を $f(x)$， $g(x)$， $f'(x)$， $g'(x)$ で表わす公式を求める．

◇商の微分法の公式◇

$$y=\frac{f(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

（証明）



$p(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと．

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

ここで，次のように変形する

$$\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x+h)}{g(x)}+\frac{f(x+h)}{g(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$=f(x+h)\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}+\frac{f(x+h)-f(x)}{g(x)}$$

$$=-\frac{f(x+h)}{g(x+h)g(x)}\{g(x+h)-g(x)\}+\frac{f(x+h)-f(x)}{g(x)}$$

これにより

$$y'=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=-\frac{f(x)}{g(x)^2}\cdot f'(x)+\frac{f'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

例と答

次の関数の導関数を求めよ．

(1) $y=\dfrac{x^2+2}{x+1}$

（答案） $y'=\dfrac{2x(x+1)-(x^2+2)}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{2x^2+2x-x^2-2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$

(2) $y=\dfrac{x-2}{x^2+1}$

（答案） $y'=\dfrac{(x^2+1)-(x-2)2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{x^2+1-2x^2+4x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$

■短答問題■

次の関数の導関数を求めよ．
（半角数字で記入すること）

(1) $y=\dfrac{x+1}{x+2}$

$y'=$　　$=\dfrac{\square}{(x+\square)^2}$

Check Reset

(2) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

$y'=$　　$=\dfrac{x^2+\square x}{(x+\square)^2}$

Check Reset

(3) $y=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$

$y'=$

$=\dfrac{\square(x-\square)}{(x+\square)^3}$

Check Reset

(4) $y=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)}$

$y' =$

$$= \frac{x^2+\square x+\square}{(x+\square)^2}$$

Check Reset

○ 合成関数の微分法

関数 $y=f(g(x))$ を $y=f(t)$ と $t=g(x)$ の合成関数と考えるとき，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

３個の関数を合成した場合も，同様

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}$$

(証明)

$\frac{dy}{dx}$ は $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を略したものであるが，平均変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は有限値÷有限値の，普通の分数であるので，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

のように変形することができる．

次に $\Delta x\to 0$ の極限を考えるとき，$\Delta t\to 0$ となる(以下，不連続関数を用いた変換は考えない)ことに注意すると，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

だから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

例と答

次の関数の導関数を求めよ．

(1)　$y=(2x+3)^4$

$y=t^4$

$t=2x+3$ とおく

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$=4t^3\cdot 2=8(2x+3)^3$ …（答）

(2)　$y=(x^2+x+1)^3$

$y=t^3$

$t=x^2+x+1$ とおく

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$=3t^2\cdot(2x+1)=3(x^2+x+1)^2(2x+1)$ …（答）

■短答問題■

次の関数の導関数を求めよ．
（空欄に半角数字を書き込むこと）

(1)　$y=(4x-3)^5$

$=\square(4x-3)^{\square}$ …（答）

Check Reset

(2)　$y=(x^2-x+2)^4$

$=\square(x^2-x+2)^{\square}(\square x-1)$ …（答）

Check Reset

○ 逆関数の微分法

x が y の関数として表わされているとき，y を x で微分するには，x を y で微分したものの逆数を取ればよい．(この場合，導関数が y の関数で表わされることもある．)

(証明)

微分可能な関数では，$\Delta x\to 0$ のとき，$\Delta y\to 0$ だから，

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ （ただし， $\frac{dx}{dy}\neq 0$ ）

例と答

(1)　$y=\sqrt{x}$　　$(0<x)$

$y^2=x$ だから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ ・・・（答）

(2)　対数関数の微分は，次のように指数関数の微分を用いて計算することもできる．

$$y=\log x \Leftrightarrow x=e^y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$$

○　陰関数の微分法

$y=2x+1$ のように y について解かれた形になっているものを陽関数，$x^2+y^2=1$ のように x，y の関係式で示され，y について解かれた形になっていないものを陰関数という．

　陰関数で表わされているものを微分するには，右の例のように両辺をそのまま微分すればよい．

　y は x の関数と考えて微分する．

例

$x^2+y^2=1$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+\frac{d}{dx}(y^2)=0$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

（陰関数の微分は，y も用いて表わせばよい．）

■短答問題■

　次の関係式から $\frac{dy}{dx}$ を求めよ．（結果は y も用いて表わしてもよい．）

（空欄には半角英数字を書き込むこと）

(1)　$x^2+xy+y^2=1$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\square x+y}{x+\square y}$$

Check　Reset

(2)　$2x^2-y^2=1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\square x}{y}$$

Check　Reset