← PC版は別頁

11　行列式２

　行列式の値をその定義にさかのぼって計算することは一般には難しいので，実際には以下に述べる行列式の性質を用いて，変形してから計算することが多い．

定理５

　行列 $\mathbf{A}$ = [a_{ij}] について次の性質が成り立つ．

(1)　転置行列の行列式は，元の行列の行列式に等しい．　| ${}^t\mathbf{A}$ | = | $\mathbf{A}$ |

(2)　列基本変形

　[線形性]

　ア)　ある列の各成分を c 倍すると行列式の値は c 倍になる．

　イ)　ある列が２つの列ベクトルの和のとき，行列式の値は各列ベクトルで計算した行列式の和になる．

　[交代性]

　ウ)　２つの列を入れ替えると行列式の符号が変わる．

　　ウ)により，２つの列が等しければ行列式の値は０となる．

　エ)　ある列に他の列の定数倍を加えても行列式の値は変わらない．

(3)　行基本変形

　転置行列の行列式についての性質(1)から，(2)のア)イ)ウ)エ)の性質は行についても成り立つ．

[　解説と具体例　]

(1)　n = 2 のとき

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

が成り立つ．

　n ≧ 3 のときも成り立つことが知られている．

(2)　前節の記述 → [**見る**　/　**隠す**]

ア)　$D[\cdots, \lambda\vec{a_i}, \cdots] = \lambda D[\cdots, \vec{a_i}, \cdots]$（ i = 1, 2, …, n ）

イ)　$D[\cdots, \vec{a_i} + \vec{a_i}', \cdots] = D[\cdots, \vec{a_i}, \cdots] + D[\cdots, \vec{a_i}', \cdots]$（ i = 1, 2, …, n ）

ウ)　$D[\cdots, \vec{a_i}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots] = -D[\cdots, \vec{a_j}, \cdots, \vec{a_i}, \cdots]$

　ウ)により，$D[\cdots, \vec{a_j}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots] = -D[\cdots, \vec{a_j}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots]$だから

$$D[\cdots, \vec{a_j}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots] = 0$$

エ)　$D[\cdots, \vec{a_i} + \lambda\vec{a_j}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots]$

$= D[\cdots, \vec{a_i}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots] + \lambda D[\cdots, \vec{a_j}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots]$

$= D[\cdots, \vec{a_i}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots]$（ i = 1, 2, …, n ）

例 1

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix} \overset{\text{3列−2列}}{=} \begin{vmatrix}1&2&1\\4&5&1\\7&8&1\end{vmatrix} \overset{\text{2列−1列}}{=} \begin{vmatrix}1&1&1\\4&1&1\\7&1&1\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{3列=2列だから}}{=} 0$$

(3)　転置行列の行列式は元の行列の行列式と等しいから，転置行列について列基本変形を行ってから元に戻すと考えれば，行基本変形も成り立つ．

例 2

$$\begin{vmatrix}2007&2008&2009\\2010&2011&2012\\2013&2014&2015\end{vmatrix} \overset{\text{3行−2行}}{=} \begin{vmatrix}2007&2008&2009\\2010&2011&2012\\3&3&3\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{2行−1行}}{=} \begin{vmatrix}2007&2008&2009\\3&3&3\\3&3&3\end{vmatrix} \overset{\text{3行=2行だから}}{=} 0$$

○　実際の変形は，以上の(1)(2)(3)を組み合わせて行う

例 3

$$\begin{vmatrix}a-4&a-3&a-2\\a-1&a&a+1\\a+2&a+3&a+4\end{vmatrix} \overset{\text{3列−2列}}{=} \begin{vmatrix}a-4&a-3&1\\a-1&a&1\\a+2&a+3&1\end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{2列−1列}}{=} \begin{vmatrix}a-4&1&1\\a-1&1&1\\a+2&1&1\end{vmatrix} \overset{\text{3列=2列だから}}{=} 0$$

例 4

サリュ（サラス）の公式でそのまま計算すれば

$$-\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$$

これとは別に，3列+1列+2列

$$-\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}a&b&a+b+c\\b&c&a+b+c\\c&a&a+b+c\end{vmatrix}$$

$$=-(a+b+c)\begin{vmatrix}a&b&1\\b&c&1\\c&a&1\end{vmatrix}$$

$$=-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

これらを比較すると，次の因数分解公式が得られる

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

例 5

2列−1列, 3列−1列

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}$$

因数分解

$$=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^2&(b-a)(b+a)&(c-a)(c+a)\end{vmatrix}$$

$D[\cdots,\lambda\vec{a_i},\cdots]=\lambda D[\cdots,\vec{a_i},\cdots]$だから

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&0&0\\a&1&1\\a^2&b+a&c+a\end{vmatrix}$$

3列−2列

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&0&0\\a&1&0\\a^2&b+a&c-b\end{vmatrix}$$

$D[\cdots,\lambda\vec{a_i},\cdots]=\lambda D[\cdots,\vec{a_i},\cdots]$だから

$$=(b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ a^2 & b+a & 1\end{vmatrix}$$

ここで $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \cdot\cdot & 1 & 0\\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & 1\end{vmatrix}=1$ だから

（原式） $=(b-a)(c-a)(c-b)$
$=(a-b)(b-c)(c-a)$

差積となる．(これをファンデルモンドの公式という．)

○　次に，**定理５**を用いた変形により，n 次の行列式が $n-1$次の行列式で表わされることを示す．これにより，行列式の次数を順次下げて計算できるようになる．

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

変形できる

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}'\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}'\end{vmatrix}$$

または

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22}'' & \cdots & a_{2n}''\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}'' & \cdots & a_{nn}''\end{vmatrix}$$

したがって

（原式）$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

例

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 3 & 7\\ 0 & 6 & 5 & 1\\ 0 & 8 & 9 & 7\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}5 & 3 & 7\\ 6 & 5 & 1\\ 8 & 9 & 7\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 7\\ 0 & 9 & 8\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}6 & 7\\ 9 & 8\end{vmatrix}$$

[　証明　]

1． 第 *1* 列の成分がすべて *0* ならば，定理５(2)エ)を用いて第 *2* 列を第 *1* 列に加えると，第 *1* 列と第 *2* 列が等しくなり，行列式の値は *0* となる．

　第 *1* 列に *0* でない成分があるとき，定理５(3)を用いて，*0* でない成分を(1,1)成分にすることができる．これを新たに a_{11} とおき，各行（i = 2 ～ n ）に第 *1* 行の $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍を加えると，各行の第 *1* 列成分を *0* にすることができる．

変形できる

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}'\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}'\end{vmatrix}$$

　同様にして，定理５(2)エ)により各列（j = 2 ～ n ）に第 *1* 列の $-\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$ 倍を加えると，各列の第 *1* 行成分を *0* にすることができる．

変形できる

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}'' & \cdots & a_{2n}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}'' & \cdots & a_{nn}'' \end{vmatrix}$$

定理５(2)ア)により

変形できる

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0' & \cdots & 0' \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{vmatrix}$$

2.

ここで，$\begin{vmatrix} 1 & 0' & \cdots & 0' \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{vmatrix}$ の各列を $\overrightarrow{a_j}$ （j ＝２～n

）とすると，

$$F(\overrightarrow{a_2}',\cdots,\overrightarrow{a_n}') = \begin{vmatrix} 1 & 0' & \cdots & 0' \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{vmatrix}$$

が $n-1$重線形性をもつことは，次のようにして示される．

ア)　各列を定数倍すると $F(\overrightarrow{a_2}',\cdots,\overrightarrow{a_n}')$ は定数倍になる．

$$F(\overrightarrow{a_2}',\cdots,c\overrightarrow{a_j}'\cdots,\overrightarrow{a_n}')$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0' & \cdots & 0' & & 0' \\ 0 & a_{22}' & \cdots & ca_{2j}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & ca_{nj}' & \cdots & a_{nn}' \end{vmatrix}$$

定理５(2)ア)

$$= c\begin{vmatrix} 1 & 0' & \cdots & 0' & & 0' \\ 0 & a_{22}' & \cdots & a_{2j}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}' & \cdots & a_{nj}' & \cdots & a_{nn}' \end{vmatrix}$$

$$= cF(\overrightarrow{a_2}',\cdots,\overrightarrow{a_j}'\cdots,\overrightarrow{a_n}')$$

イ)　ある列ベクトルが２つの列ベクトルの和であるとき，

$$F(\overrightarrow{a_2}'',\cdots,\overrightarrow{a_j}''+\overrightarrow{a_k}''\cdots,\overrightarrow{a_n}'')$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22}'' & \cdots & a_{2j}''+a_{2k}'' & \cdots & a_{2n}'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}'' & \cdots & a_{nj}''+a_{nk}'' & \cdots & a_{nn}'' \end{vmatrix}$$

定理５(2)イ)のより，行列式の値は各列ベクトルで計算した行列式の和になる．

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22}'' & \cdots & a_{2j}'' & \cdots & a_{2n}'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}'' & \cdots & a_{nj}'' & \cdots & a_{nn}'' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & a_{22}'' & \cdots & a_{2k}'' & \cdots & a_{2n}'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}'' & \cdots & a_{nk}'' & \cdots & a_{nn}'' \end{vmatrix}$$

ウ)　交代性も示すことができる．

以上**ア，イ，ウ)**により，$F(\overrightarrow{a_2}'',\cdots,\overrightarrow{a_n}'')$

は，各列について $n-1$重線形性をもつから，前節の記述より，

$$F(\overrightarrow{a_2}'', \cdots, \overrightarrow{a_n}'') = D[\overrightarrow{a_2}'', \cdots, \overrightarrow{a_n}'']$$

例 6

次の形の行列を各々上三角行列，下三角行列という．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{13} & \cdots & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角行列の行列式は，対角成分の積になる．

定理5 (2)アにより

$D[.., \lambda\vec{a_i}, ..] = \lambda[.., \vec{a_i}, ..]$だから

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理５(2)エ)により各列(j =2〜n)に

第 1 列の $-\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$ 倍を加えると，各列の

第 1 行成分を 0 にすることができる

$$= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以下同様に行うと

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

下三角行列の行列式も同様にして，対角成分の積となる．

例 7

(1)

3列を2でくくる

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1列=3列だから

$$= 0$$

(2)

(3,1)成分を消すために

3行+1行×(−2)とする

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

(1,3)成分を消すために

3列+1列×(−3)とする

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11$$

(3)

1行と2行の入れ替え，符号は変わる

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

上三角行列の行列式は対角成分の積

$$= -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = -24$$

(4)

(1,1)成分を1にしたいので，1行を(−1)でくくる

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(1,1)成分以外の1列目を消すために
2行+1行×(−3)
3行+1行×(−1)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(1,1)成分以外の1行目を消すために
2列+1列
3列+1列×2

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

3次正方行列に下げる

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

サリュの公式が使いやすい

$$= -3$$

○　行列の積の行列式については，次の関係が成り立つ．

定理 6

n 次正方行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ について

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| = |\mathbf{BA}|$$

※　行列の積については，必ずしも交換可能とは限らないが，行列式については交換可能となる．

［ 証明 ］

A の列ベクトル $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}$ で表わすと

$BA = [B\vec{a_1}, B\vec{a_2}, \cdots, B\vec{a_n}]$

$F(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}) = D[B\vec{a_1}, B\vec{a_2}, \cdots, B\vec{a_n}]$ とおくと， $F(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n})$ が n 重線形性をもつことは，次のようにして示される．

［ 線形性 ］

$$\begin{aligned} &F(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, c\vec{a_j}, \cdots, \vec{a_n}) \\ &= D[B\vec{a_1}, B\vec{a_2}, \cdots, cB\vec{a_j}, \cdots, B\vec{a_n}] \\ &= cD[B\vec{a_1}, B\vec{a_2}, \cdots, B\vec{a_j}, \cdots, B\vec{a_n}] \\ &= cF(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots, \vec{a_n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_j} + \vec{a_j}', \cdots, \vec{a_n}) \\ &= D[B\vec{a_1}, B\vec{a_2}, \cdots, B(\vec{a_j} + \vec{a_j}'), \cdots, B\vec{a_n}] \\ &= D[B\vec{a_1}, B\vec{a_2}, \cdots, B\vec{a_j}, \cdots, B\vec{a_n}] \\ &\quad + D[B\vec{a_1}, B\vec{a_2}, \cdots, B\vec{a_j}', \cdots, B\vec{a_n}] \\ &= F(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_j}, \cdots, \vec{a_n}) \\ &\quad + F(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_j}', \cdots, \vec{a_n}) \end{aligned}$$

［ 交代性 ］も示される．

以上により，$\mathsf{F}(\mathbf{A}) = |\mathbf{BA}|$ は，$\mathbf{A}$ の各列について n 重線形性をもつから，

$\mathsf{F}(\mathbf{A}) = |\mathbf{BA}| = c|\mathbf{A}|$ とおける．（ c は定数 ）

ここで，$\mathsf{F}(\mathbf{E}) = |\mathbf{BE}| = |\mathbf{B}|$ だから，$c = |\mathbf{B}|$

ゆえに，$\mathsf{F}(\mathbf{A}) = |\mathbf{BA}| = |\mathbf{B}||\mathbf{A}|$

定理６から次の関係が導かれる．

(1)　$|\mathbf{A}^{k}| = |\mathbf{A}|^{k}$

(2)　$\mathbf{A}^{-1}$ が存在するとき，($|\mathbf{A}| \neq 0$ のとき)　$|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$

一般に，$\mathbf{A}^{-k} = \mathbf{A}^{-1} \cdots \mathbf{A}^{-1}$ (正の整数 k 個の積)と定義すれば　$|\mathbf{A}^{-k}| = |\mathbf{A}|^{-k}$

さらに，$\mathbf{A}^{0} = \mathbf{E}$ と定義すれば，任意の整数 k について $|\mathbf{A}^{-k}| = |\mathbf{A}|^{-k}$

[証明]

(1)　$n = 2$ のとき，$|\mathbf{A}^{2}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^{2}$，
$n \geqq 3$ のときも帰納的に示される．

(2)　$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ だから，$|\mathbf{AA}^{-1}| = |\mathbf{E}| = 1$

また $|\mathbf{AA}^{-1}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}|$

ゆえに $|\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}| = 1$

$|\mathbf{A}| \neq 0$ だから $|\mathbf{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

次に正の整数kについて，$\mathbf{A}^{-k} = \mathbf{A}^{-1} \cdots \mathbf{A}^{-1}$ と定義すれば，

$$|\mathbf{A}^{-k}| = |\mathbf{A}^{-1} \cdots \mathbf{A}^{-1}| \overset{\text{(1)の結果}}{=} |\mathbf{A}|^{-k}$$

さらに，k が任意の整数のとき

1)　k が正の整数のときは上に示した．

2)　k が負の整数のときは k = − m (m ＞ 0)とおくと

$|\mathbf{A}^{-k}| = |\mathbf{A}^{m}| = |\mathbf{A}|^{m} = |\mathbf{A}|^{-k}$ が成り立つ．

3)　k = 0 のときは $|\mathbf{A}^{-0}| = |\mathbf{A}^{0}| \overset{\text{0乗の定義により}}{=} |\mathbf{E}| = 1$

$|\mathbf{A}|^{-0} = 1$だから，k = 0 のときも $|\mathbf{A}^{-k}| = |\mathbf{A}|^{-k}$

■確認テスト■

次の行列式の値を求めよ．　[半角数字=1バイト文字で答えよ]　(途中経過は一例)

(1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

＝

採点する　やり直す

[途中経過：**見る** | **隠す**]

[方向性]上三角行列にすることを目指す

(1,1)成分を1にしたいから

1行と3行を入れ替える（符号は変わる）

$$=-\begin{vmatrix}1&5&-2&0\\0&3&2&1\\0&1&0&1\\2&6&3&-1\end{vmatrix}$$

(1,1)成分以外の１列目を0にしたいから

4行+1行×(−2)

$$=-\begin{vmatrix}1&5&-2&0\\0&3&2&1\\0&1&0&1\\0&-4&7&-1\end{vmatrix}$$

(2,2)成分を1にしたいから

2行と3行の入れ替え（符号は変わる）

$$=\begin{vmatrix}1&5&-2&0\\0&1&0&1\\0&3&2&1\\0&-4&7&-1\end{vmatrix}$$

2列目の対角成分よりも下を消したいから

3行+2行×(−3), 4行+2行×4

$$=\begin{vmatrix}1&5&-2&0\\0&1&0&1\\0&0&2&-2\\0&0&7&3\end{vmatrix}$$

(3,3)成分を1にしたいから

3行を2でくくる

$$=2\begin{vmatrix}1&5&-2&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&7&3\end{vmatrix}$$

3列目の対角成分よりも下を消したいから

4行+3行×(−7)

$$=2\begin{vmatrix}1&5&-2&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&10\end{vmatrix}$$

上三角行列になったから，対角成分の積を求める

$$=2\cdot(1\cdot1\cdot1\cdot10)=20$$

(2)

$$\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\-3&1&1&2\\2&3&0&1\\0&4&-1&1\end{vmatrix}$$

=

採点する　やり直す

[途中経過： **見る** | **隠す**]

[方向性]上三角行列にすることを目指す

(1,1)成分以外の１列目を0にしたいから

2行+1行×3, 3行+1行×(−2)

$$=\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\0&1&-5&11\\0&3&4&-5\\0&4&-1&1\end{vmatrix}$$

2列目の対角成分よりも下を消したいから

3行+2行×(−3), 4行+2行×(−4)

$$=\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\0&1&-5&11\\0&0&19&-38\\0&0&19&-43\end{vmatrix}$$

(3,3)成分を1にしたいから

3行を19でくくる

$$=19\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\0&1&-5&11\\0&0&1&-2\\0&0&19&-43\end{vmatrix}$$

3列目の対角成分よりも下を消したいから

4行+3行×(−19)

$$=19\begin{vmatrix}1&0&-2&3\\0&1&-5&11\\0&0&1&-2\\0&0&0&-5\end{vmatrix}$$

上三角行列になったから，対角成分の積を求める

$$=19\cdot\{1\cdot1\cdot1\cdot(-5)\}=-95$$

(3)

$$\begin{vmatrix}0&3&4&0\\1&-6&3&2\\0&0&1&0\\2&8&5&-2\end{vmatrix}$$

=

採点する　やり直す

[途中経過： **見る** | **隠す**]

[方向性]下三角行列にすることを目指す（上三角か下三角かは，どちらでもよい．既にある０の個数に差があればそれを利用すればよい．いつでも転置行列に変えられるから，上下で迷う必要なし）

(1,1)成分を1にしたいから

1行と2行を入れ替え（符号は変わる）

$$=-\begin{vmatrix}1&-6&3&2\\0&3&4&0\\0&0&1&0\\2&8&5&-2\end{vmatrix}$$

(1,1)成分以外の１列目を0にしたいから

4行+1行×(−2)

$$=-\begin{vmatrix}1&-6&3&2\\0&3&4&0\\0&0&1&0\\0&20&-1&-6\end{vmatrix}$$

(1,1)成分以外の１行目を0にしたいから

2列+1列×6, 3列−1列×3, 4列−1列×2

（なお，2,3,4行目には影響はない）

$$=-\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&3&4&0\\0&0&1&0\\0&20&-1&-6\end{vmatrix}$$

1列目で展開して，3次正方行列に下げる

$$=-\begin{vmatrix}3&4&0\\0&1&0\\20&-1&-6\end{vmatrix}$$

1列と3列の入れ替え（符号は変わる）

$$=-\begin{vmatrix}0&4&3\\0&1&0\\-6&-1&20\end{vmatrix}$$

1行と3行の入れ替え（符号は変わる）

$$=\begin{vmatrix}-6&-1&20\\0&1&0\\0&4&3\end{vmatrix}$$

1列目で展開して，2次正方行列に下げる

$$=6\begin{vmatrix}1&0\\4&3\end{vmatrix}$$

下三角行列だから対角成分の積を求める

$$=6\cdot3=18$$

(4)

$$\begin{vmatrix}1&0&3&0\\2&1&1&1\\-3&2&-2&0\\2&0&1&2\end{vmatrix}$$

=

採点する　やり直す

[途中経過： **見る** | **隠す**]

[方向性]下三角行列にすることを目指す（上三角か下三角かは，どちらでもよい）

(1,1)成分以外の１行目を0にしたいから

3列+1列×(−3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ -3 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

2行目の対角成分よりも上を消したいから

3列+2列×5, 4列−2列

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 17 & -2 \\ 2 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

3行目の対角成分よりも上を消したいから

3行+4行

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

下三角行列になったから対角成分の積を求める

$$=1\cdot 1\cdot 12\cdot 2=24$$

(5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

=

採点する　やり直す

[途中経過： **見る** | **隠す**]

[方向性]１つの対角成分を１にして，関連する行と列の成分を0にする．これを繰り返して，対角行列に変える

(1,1)成分以外の１列目を0にしたいから

2行+1行×(−1), 3行+1行×2

$$=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

(1,1)成分以外の１行目を0にしたいから

2列+1列×(−3), 3列+1列, 4列+1列×(−2)

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

(2,2)成分を１にしたいから

2行と4行を入れ替える(符号は変わる)

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(2,2)成分以外の2列目を0にしたいから

3行+2行×(−7), 4行+2行×3

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

(3,3)成分を１にしたいから

3行と4行を入れ替える(符号は変わる)

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 3 \end{vmatrix}$$

(3,3)成分を１にしたいから

3行を７でくくる

$$=7\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&-16&3\end{vmatrix}$$

(3,3)成分以外の3列目を0にしたいから

4行+3行×(−16)

$$=7\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}$$

対角行列になったから，対角成分の積を求める

$$=7\cdot3=21$$

(6)

$$\begin{vmatrix}1&a&b&c+d\\1&b&c&d+a\\1&c&d&a+b\\1&d&a&b+c\end{vmatrix}$$

=

採点する　やり直す

[途中経過： **見る** | **隠す**]

4行+2列+3列

$$=\begin{vmatrix}1&a&b&a+b+c+d\\1&b&c&a+b+c+d\\1&c&d&a+b+c+d\\1&d&a&a+b+c+d\end{vmatrix}$$

4列をa+b+c+dでくくる

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&a&b&1\\1&b&c&1\\1&c&d&1\\1&d&a&1\end{vmatrix}$$

1列=4列となっているから

$$=0$$

(7)

（解答の文字は，半角でアルファベット順に答えよ）

$$\begin{vmatrix}0&0&0&d\\0&0&c&d^2\\0&b&c^2&d^3\\a&b^2&c^3&d^4\end{vmatrix}$$

=

採点する　やり直す

[途中経過： **見る** | **隠す**]

1行と4行の入れ替え，2行と3行の入れ替え（符号は2回変わる）

$$=\begin{vmatrix}a&b^2&c^3&d^4\\0&b&c^2&d^3\\0&0&c&d^2\\0&0&0&d\end{vmatrix}$$

上三角行列になるから，対角成分の積を求める

$$=abcd$$