← PC版は別頁

3　行列の定義

○　**行列**（matrix）とは，スカラー（数とか式）を縦，横に並べたもので，配列（array）ともいう．
○　m×n個の数を長方形に並べ [　] または（　）でくくってまとめたもの

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

または

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を**m行n列の行列，m×n型の行列，m×n行列，（m，n）行列**などという．
○　行列を表わす記号には大文字を用いる．たとえば

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とおいて，行列$\mathbf{A}$，行列$\mathbf{B}$という．
○　行列$\mathbf{A}$の上からi番目，左からj番目に現われる数a_{ij}を行列$\mathbf{A}$の（i, j）成分という．
○　２つの行列$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$は「型が一致」して，かつ「すべてのi, jについて$a_{ij}=b_{ij}$」のとき，等しいといい$\mathbf{A}=\mathbf{B}$と書く．

例 1
(1)　４軒のコンビニで，りんご，かき，みかんの単価を調査した結果をこの順に並べたもの

$$A=\begin{bmatrix} 128 & 108 & 58 \\ 150 & 120 & 50 \\ 136 & 116 & 76 \\ 100 & 110 & 88 \end{bmatrix}$$

(2)　2×3行列$\mathbf{B}$において（i, j）成分を$b_{ij}=i+j$の規則でつくったもの

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(3)　次の２つの行列は等しい．すなわち，$\mathbf{C}=\mathbf{D}$である．

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

　次の２つの行列は等しくない．すなわち，$\mathbf{E}\neq\mathbf{F}$である．
（行列の型が異なる．）

$$E=\begin{pmatrix} 10 & -11 & 0 \\ -21 & 22 & 0 \end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -21 & 22 \end{pmatrix}$$

○　行列$\mathbf{A}$の成分の横の並びを$\mathbf{A}$の**行**（row）といい，上から第i番目の行を**第i行**という．

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

の**第** i **行**($1 \leqq i \leqq m$)は

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

　また，行列$\mathbf{A}$の成分の縦の並びを$\mathbf{A}$の**列**（column）といい，左から第j番目の列を$\mathbf{A}$の**第** j **列**という.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

の**第** j **列**($1 \leqq j \leqq n$) は

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

○　よく現われる特別な行列として，次のようなものがある.

　• 1×n行列を**n次の行ベクトル**（横ベクトル），m×1行列を**m次の列ベクトル**（縦ベクトル）という.

　行列$\mathbf{A}$の**第** j **列ベクトル**

$$a_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

を束ねると

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

と書ける.

　• すべての成分が0であるm×n行列を**零行列**（zero matrix）といい，$\mathbf{0}_{m,n}$で表わすが，型が明らかな場合は$\mathbf{0}$と書く.

例 2　 2×3型の零行列は

$$0_{2,3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

　• 行数と列数が等しい行列を**正方行列**（square matrix）といい，n×n行列を**n次の正方行列**という.

例 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

は2次の正方行列である.

　• 対角線上にある成分（右下がりの対角線，すなわち行番号と列番号が等しい成分）　a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} を**対角成分**という.

　特に，正方行列であって，かつ，対角成分以外のずべての成分が0であるような行列を**対角行列**（diagonal matrix）という. （対角成分は，何でもよい. ）

例 4

　次の行列$\mathbf{A}$の対角成分は，3，0，1，行列$\mathbf{B}$の対角成分は，4，3，0，1であり，$\mathbf{A}$は対角行列でなく，$\mathbf{B}$は対角行

列である．

$$A=\begin{pmatrix}3&4&5\\2&0&-2\\-1&5&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

- 対角成分がすべて1となる対角行列を**単位行列**（identity matrix，unit matrix）という．n次の単位行列を$\mathbf{E}_n$で表わし，次数が明らかなときは，$\mathbf{E}$で表わす．

例 5

$$E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

- 対角成分がすべて等しい対角行列を**スカラー行列**（scalar matrix）という．スカラー行列はk$\mathbf{E}$の形に表せる．

例 6　次の行列はスカラー行列である．

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=3E$$

■確認テスト■　（半角数字で答えよ）

(1)　行列 $A=\begin{pmatrix}0&1&8&9&14\\3&2&7&10&13\\4&5&6&11&12\end{pmatrix}$ について答えよ．

・何行何列の行列か　…　□行□列

・$a_{23}=$□

(2)　3×3行列$\mathbf{A}$= [a_{ij}] の成分が$a_{ij}=i-j$ で与えられるとき，$\mathbf{A}$を書け．

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{bmatrix}$$

(3)　２次の単位行列を書け．

$$\begin{bmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{bmatrix}$$

(4)　次の行列$\mathbf{A}$と同じ対角成分をもつ対角行列$\mathbf{B}$を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}0&1&8\\3&2&7\\4&5&6\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{bmatrix}$$

(5)　２次のスカラー行列 5$\mathbf{E}$を成分で表せ．

$$5E=\begin{bmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{bmatrix}$$

Check　Reset