→ スマホ版は別頁

5　連立１次方程式１

○　行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

は，その列ベクトル

$$\vec{a_j}=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j=1,2,...,n)$$

を用いて，

$$A=\left[\vec{a_1},\vec{a_2},\ldots,\vec{a_n}\right]$$

と書くことができる．

また，行ベクトル $\vec{b_i}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{im})$ を用いて

$$A=\begin{pmatrix} \vec{b_1} \\ \vec{b_2} \\ \vdots \\ \vec{b_m} \end{pmatrix}$$

と書くこともできる．

○　n個の未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に関するm個の１次方程式からなる連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \cdots(*) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad = \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

をn元連立1次方程式という．(ここに，mは式の個数，nは未知数の個数)

この連立方程式は，行列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ベクトル

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

を用いて，

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

と書くことができる．

このとき，$\mathbf{A}$を連立方程式の**係数行列**，$\vec{x}$ を**未知数**（ベクトル），$\vec{b}$ を**右辺**という．

例１

鶴の頭数を x_1，亀の頭数を x_2，鶴と亀の頭数の合計を b_1，鶴と亀の足の数の合計を b_2 とするとき，いわゆる「鶴亀算」は次の連立方程式に直せる．

$$\begin{cases} x_1+x_2=b_1 \\ 2x_1+4x_2=b_2 \end{cases}$$

この連立方程式は，ベクトルを用いて，次のように表わすことができる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

ここで

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&4\end{pmatrix},\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

とおけば，この方程式は

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

と書ける．

例 2

狐の頭数をx_1，狸の頭数をx_2，狐と狸の頭数の合計をb_1，狐と狸の足の数の合計をb_2として，「狐狸算」というものを考えると，次の連立方程式で表せる．

$$\begin{cases}x_1+x_2=b_1\\4x_1+4x_2=b_2\end{cases}$$

この連立方程式は，行列とベクトルを用いて，次のように表わすことができる．

$$\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

ここで

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix},\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

とおけば，この方程式は

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

と書ける．

例 3

りんごの個数をx_1，かきの個数をx_2，みかんの個数をx_3，りんご･かき･みかんの個数の合計をb_1，りんご１個の価格を150円，かき１個の価格を120円，みかん１個の価格を80円，合計の価格をb_2， りんご１個の重さを200g，かき１個の重さを130g，みかん１個の重さを70g，合計の重さをb_3とするとき，

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=b_1\\150x_1+120x_2+80x_3=b_2\\200x_1+130x_2+70x_3=b_3\end{cases}$$

この連立方程式は，行列とベクトルを用いて，次のように表わすことができる．

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\150&120&80\\200&130&70\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

ここで，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\150&120&80\\200&130&70\end{pmatrix},\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

とおけば，この方程式は

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

と書ける．

○　連立方程式の右辺の定数項からなる列ベクトル$\vec{b}$を係数行列の右側に付け加えたm×(n+1)行列

$$\left[A\ \vec{b}\right]=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

を**拡大係数行列**という．

既知の値$A,\vec{b}$をすべて定めると方程式が定まるが，既知の値の一覧表が拡大係数行列となっている．

例 4

連立１次方程式

$$\begin{cases}x_1+x_2=5\\4x_1+5x_2=23\end{cases}$$

の拡大係数行列は

$$\begin{pmatrix}1&1&5\\4&5&23\end{pmatrix}$$

例 5

連立１次方程式

$$\begin{cases}x_1+4x_2+7x_3-x_4=4\\2x_1+8x_3-2x_4=5\\3x_1+6x_2-3x_4=6\end{cases}$$

を行列で表わすと，

$$\begin{pmatrix}1&4&7&-1\\2&0&8&-2\\3&6&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

このとき，**係数行列**は，

$$\begin{pmatrix}1&4&7&-1\\2&0&8&-2\\3&6&0&-3\end{pmatrix}$$

拡大係数行列は，

$$\begin{pmatrix}1&4&7&-1&4\\2&0&8&-2&5\\3&6&0&-3&6\end{pmatrix}$$

である．

（※この連立方程式は，未知数が4個，方程式が3個となっていて，不定解になる形であるが，ここでは拡大係数行列という用語を解説しているのであるから，不定解になることは重要ではない）

○　連立１次方程式

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdot\cdot\cdot+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdot\cdot\cdot+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad=\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdot\cdot\cdot+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\cdots(*)$$

は，列ベクトル

$$\overrightarrow{a_j}=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\ \vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}\quad(j=1,2,\cdot\cdot\cdot,n)$$

の１次結合で表わすこともできる：

$$x_1\overrightarrow{a_1}+x_2\overrightarrow{a_2}+\cdot\cdot\cdot+x_n\overrightarrow{a_n}=\vec{b}$$

この場合，ベクトル $\vec{b}$ を $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdot\cdot\cdot,\overrightarrow{a_n}$ の１次結合で表わしたときの係数 $x_1,x_2,\cdot\cdot\cdot,x_n$ が連立方程式の解となる．

例６

イカの頭数を x_1，タコの頭数を x_2，イカとタコの頭数の合計を b_1，イカとタコの足の数の合計を b_2 とし，「イカ·タコ算」というものを考えると

$$\begin{cases}x_1+x_2=b_1\\10x_1+8x_2=b_2\end{cases}$$

この連立方程式は，次のように表わすことができる．

$$\overrightarrow{a_1}=\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix},\ \overrightarrow{a_2}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

とおけば

$$x_1\overrightarrow{a_1}+x_2\overrightarrow{a_2}=\vec{b}$$

■確認テスト■　　（半角数字で答えよ）

(1)　次の連立方程式を行列を用いて表せ．

$$\begin{cases}x_1+4x_2=4\\3x_1+6x_2=6\end{cases}$$

$$\cdots\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}\square&\square\\\square&\square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square\\\square\end{pmatrix}$$

採点する　やり直す

(2)　次の連立方程式の係数行列を示せ．

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=2\\3x_1+2x_2-x_3=-1\end{cases}$$

$$\cdots\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{pmatrix}$$

採点する　やり直す

(3)　次の連立方程式の拡大係数行列を示せ．

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 \qquad\quad = 5 \end{cases}$$

$\cdots\cdots\to \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$

採点する　やり直す

(4)　次の拡大係数行列をもつ連立１次方程式を書け.

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\cdots\cdots\to \begin{cases} \square x_1 + \square x_2 = \square \\ \square x_1 + \square x_2 = \square \end{cases}$

採点する　やり直す

(5)

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 26 \end{pmatrix}$$

のとき,

$$x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} = \vec{b}$$

を満たす x_1, x_2 の値を求めよ.

$x_1 = \square$, $x_2 = \square$

採点する　やり直す