→ スマホ版は別頁

2　ベクトルと基本概念２

○　前節でベクトルの１次結合 $\vec{u}=\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}$ を学んだ．ここでは，１次結合に関わる重要な概念を解説する．
○　ベクトル $\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ の１次結合が $\vec{0}$ になるのが特別な場合に限られるとき，すなわち，
「$\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}=\vec{0}$ となるのが，$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ のときに限られるとき」，ベクトル $\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ は**１次独立**であるという．１次独立でないとき，**１次従属**であるという．

【１次独立の定義 】
「$\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}=\vec{0}$ ならば $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$」
が成り立つとき，$\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ は**１次独立**であるという．

※「$\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}=\vec{0} \Longleftarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$」が，どんな $\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ についても成立することは自明の理であるが，ここでは
「$\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}=\vec{0} \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 」すなわち，
「$\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}=\vec{0}$」となるのが，「$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$」の場合だけとなる $\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ の組に注目している．

※「p⇒q」は，その対偶「qでない⇒pでない」と真偽が一致するから，上に述べた１次独立の定義は，次のように言い換えることができる．
「$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ が１つでも0でなければ $\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}=\vec{0}$ にはならない」
　例えば，$\lambda_1\neq 0$ であるのに $\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}=\vec{0}$ となるときは，両辺を λ_1 で割って移項すれば

$$\vec{u_1}=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{u_2}-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{u_3}-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{u_n}$$

となり，$\vec{u_1}$ が他の $\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ の１次結合で表せることとなる．

このような $\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ は１次独立ではない．すなわち，１次従属である．

λ_2 以下についても同様だから，一般に，いずれか１つのベクトル $\vec{u_k}$ が他のベクトルの１次結合で表わされる組を１次従属，どのベクトルも他のベクトルの１次結合で表現できないときを１次独立と定義していることになる．(*)

例1
(1) $\vec{e_1}$ =(1, 0)，$\vec{e_2}$ =(0, 1) は１次独立である．何故なら，$\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}=\vec{0}$ のとき，
$\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1)=(0,0)$ より，$\lambda_1=\lambda_2=0$ が成り立つからである．
「⇒」や「ならば」という用語をクールに聞き流さないことが大切．変形していくと，$\lambda_1=\lambda_2=0$ になるとは，「解があれば必ずこれを満たすはずである」ということ，つまり，「これ以外にはない」という意味に理解することが重要.

---

(2) $\vec{u_1}$ =(1, 2)，$\vec{u_2}$ =(2, 3)は１次独立である．何故なら，$\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}=\vec{0}$ のとき，
$\lambda_1(1,2)+\lambda_2(2,2)=(0,0)$ より，λ_1,λ_2 は連立方程式

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=0\\2\lambda_1+3\lambda_2=0\end{cases}$$

の解となり，$\lambda_1=\lambda_2=0$ が成り立つからである．（解があれば，$\lambda_1=\lambda_2=0$ になるとは，他にはないということ．）

---

(3) $\vec{u_1}$ =(1, 2)，$\vec{u_2}$ =(2, 4)は１次従属である．何故なら，$\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}=\vec{0}$ のとき，
$\lambda_1(1,2)+\lambda_2(2,2)=(0,0)$ より，λ_1,λ_2 は連立方程式

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ 2\lambda_1+4\lambda_2=0\end{cases}$$

の解となり，$\lambda_1=-2\lambda_2$ を満たす λ_1,λ_2 は0でなくともすべて解となる．

※　「１次独立・１次従属は，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ の連立方程式が自明解 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 以外の解をもつかどうかで判断できる」が，この問題については，次のように即答することもできる．

$\vec{u_2}=2\vec{u_1}$ となっている（$\vec{u_2}$ が $\vec{u_1}$ で表わされる）から，これら $\vec{u_1},\vec{u_2}$ は１次従属である．(*↑)

---

(4) $\vec{u}$ =(1, 0)，$\vec{v}$ =(0, 1)，$\vec{w}$ =(2, 3)は１次従属である．何故なら，$\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$ となって $\vec{w}$ が $\vec{u},\vec{v}$ で表せるからである．

連立方程式で調べると次のようになる．

$$\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}+\lambda_3\vec{w}=\vec{0}$$

ならば

$$\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1)+\lambda_3(1,1)=(0,0)$$

より $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ は連立方程式

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

の解となり，$\lambda_1=\lambda_2=-\lambda_3$ を満たす $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ は解となる．（自明解 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 以外に解が存在する．）

【 要点 】

○ ベクトル $\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ について，$\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}=\vec{0}$ が自明解 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 以外の解をもてばこれらの $\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ は１次従属である．自明解のみをもつときは１次独立である．

○ ベクトル $\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ について，いずれか１つのベクトル $\vec{u_k}$ が他のベクトルの１次結合で表わされるとき，これらの $\vec{u_1},\vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ は１次従属である．どのベクトルも他のベクトルの１次結合で表現できないときは１次独立である．」

○　２次元の数ベクトルは，$\vec{x}=(x_1,x_2)\in R^2$ で表わされる．このとき，$\vec{e_1}=(1,0),\vec{e_2}=(0,1)$ の２つのベクトルを用いれば，どのようなベクトル $\vec{x}$ でも $\vec{e_1},\vec{e_2}$ の１次結合で表せる．

$$\vec{x}=(x_1,x_2)=x_1(1,0)+x_2(0,1)=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}$$

$\vec{e_1},\vec{e_2}$ をR^{2}の**標準基底**といい，R^{2}は $\vec{e_1},\vec{e_2}$ によって「**生成される**」「**張られる**」という．

○　３次元の数ベクトルは，$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ で表わされる．このとき，$\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$, $\vec{e_3}=(0,0,1)$ の３つのベクトルを用いれば，どのようなベクトル $\vec{x}$ でも $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ の１次結合で表せる．

$$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)=x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}$$

$\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ をR^{3}の**標準基底**といい，R^{3}は $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ によって「**生成される**」「**張られる**」という．

○　ベクトルの組が R^2 や R^3 の部分集合を生成することがある．

例2

$\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$ の１次結合の全体

$$L=\{\vec{u}\,|\,\vec{u}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}\}\quad(x,y\in R)$$

は，$(x,y,0)$ の形のベクトルを表わし，R^{3}を生成するわけではない．しかし，Lの任意の要素 $\vec{u},\vec{v}$ について，$\vec{u},\vec{v}$ の１次結合 $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ はLの要素となる．

$$\lambda(u_1,u_2,0)+\mu(v_1,v_2,0)=(\lambda u_1+\mu v_1,\lambda u_2+\mu v_2,0)\in L$$

○　上の例のように，R^{n}の部分集合Wの任意の要素 $\vec{u},\vec{v}$ の１次結合もまたWの要素となるとき，Wは $\vec{u},\vec{v}$ によって生成される（張られる）**部分ベクトル空間**であるという．

•WがR^{n}の部分集合で

$$\vec{u},\vec{v}\in W,\lambda_1,\lambda_2\in R\Longrightarrow\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}\in W$$ （１次結合について閉じている）

が成り立つとき，WをR^{n}の**部分ベクトル空間**という．

次のように定義してもよい．

•WがR^{n}の部分集合で

$\vec{u}, \vec{v} \in W, \lambda \in R \Longrightarrow \vec{u}+\vec{v} \in W, \lambda\vec{u} \in W$ （和とスカラー倍について閉じている）

が成り立つとき，WをR^{n}の**部分ベクトル空間**という．

例3

(1) $\vec{a_1}=(1,1,2), \vec{a_2}=(-1,1,1)$ の１次結合の全体

$$H=\{\,\vec{u}\,|\,\vec{u}=\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2},\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in R\}$$

は，R^{3}の**部分ベクトル空間**で一つの平面を表わしている．

実際， $\vec{u}, \vec{v} \in H$ ならば $\vec{u}=\alpha_1\vec{a_1}+\alpha_2\vec{a_2}$， $\vec{v}=\beta_1\vec{a_1}+\beta_2\vec{a_2}$ と表せるから，

$x\vec{u}+y\vec{v}=x(\alpha_1\vec{a_1}+\alpha_2\vec{a_2})+y(\beta_1\vec{a_1}+\beta_2\vec{a_2})$
$=(x\alpha_1+y\beta_1)\vec{a_1}+(x\alpha_2+y\beta_2)\vec{a_2} \in H$

なお，一般に $\lambda\vec{a_1}+\mu\vec{a_2}=(\lambda+\mu)\dfrac{\lambda\vec{a_1}+\mu\vec{a_2}}{\mu+\lambda}$ は， $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ の内分点（外分点）の定数倍だから，ベクトル $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ と同一平面上にある．($\lambda+\mu=0$ のときも結果は正しい．)

上の場合，Hは $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ で**張られる部分ベクトル空間**と呼ばれ， $H=\left[\vec{a_1}, \vec{a_2}\right]$ と書く．

---

(2)　上の例(1)において， $\vec{b_1}=\vec{a_1}+\vec{a_2}=(0,2,3)$， $\vec{b_2}=\vec{a_1}-\vec{a_2}=(2,0,1)$ とおくと，
$\vec{a_1}=\dfrac{\vec{b_1}+\vec{b_2}}{2}$， $\vec{a_2}=\dfrac{\vec{b_1}-\vec{b_2}}{2}$ となるから， $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ で表わされるベクトルは $\vec{b_1}, \vec{b_2}$ でも表わされ，Hは $\vec{b_1}, \vec{b_2}$ で張られる．

(1)(2)の例で， $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ の組や $\vec{b_1}, \vec{b_2}$ の組はHの**基底**といい，その個数(=2)をHの**次元**という．

■確認テスト■

白枠には半角数字で答え，緑枠には漢字で答えよ

(1) $\vec{u}=(1,1), \vec{v}=(2,3)$ のとき， $\vec{u}, \vec{v}$ が１次独立かどうかを調べたい．次の空欄を埋めよ．

$\lambda_1\,\vec{u}+\lambda_2\,\vec{v}=(2,3)=\vec{0}$ のとき，λ_1(1, 1)+λ_2(2, 3)=(0, 0)より，λ_1，λ_2は次の連立方程式の解となる．

λ_1 + [　] λ_2 = 0
λ_1 + [　] λ_2 = 0

これを解くと，λ_1 = λ_2 = [　] となるから， $\vec{u}, \vec{v}$ は１次[　　]である．

---

(2) $\vec{u}$ =(1, 1, −1)， $\vec{v}$ =(1, 2, 1)， $\vec{w}$ =(2, 3, 0)のとき， $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ が成り立つ．このとき， $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ は１次[　　]である．

---

(3)　次の空欄を埋めて，R^{2}の任意のベクトル $\vec{x}=(x,y)$ が，ベクトル $\vec{u}=(1,1), \vec{v}=(1,-1)$ の１次結合で表わされることを示せ．

「 $\vec{x}=\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}$ となるλ_1，λ_2が求まればよい．x, yを与えられた数，λ_1，λ_2を未知数として，次の連立方程式を解く．

$\lambda_1+\lambda_2$=x　… (A)
$\lambda_1-\lambda_2$=y　… (B)

{(A)+(B)}÷2　より　$\lambda_1=\dfrac{x+y}{[\ ]}$，　{(A)−(B)}÷2　より　$\lambda_2=\dfrac{x-y}{[\ ]}$となるから，

任意のベクトル $\vec{x}=(x,y)$ は，ベクトル $\vec{u}=(1,1), \vec{v}=(1,-1)$ の１次結合で表わされる．」

---

(4) $\vec{a_1}$ =(0, 1, −1)，$\vec{a_2}$ =(1, −1, 1)とするとき，$\vec{u}$ =(1, 0, k)が $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ で張られる部分ベクトル空間 $H = \left[\vec{a_1}, \vec{a_2}\right]$ のベクトルとなるように定数kの値を定めよ．(空欄を埋めよ．)

$\vec{u} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2}$ が成立するようにkの値を定める．
(1, 0, k)=λ_1(0, 1, −2)+λ_2(1, −1, 1)より
$1=\lambda_2$
$0=\lambda_1-\lambda_2$
$k=-2\lambda_1+\lambda_2$ を解くと

λ_1=□，λ_2=□だからk=□

---

(5) $\vec{u}, \vec{v}$ を基底とする部分ベクトル空間において，ベクトル $\vec{x}$ が $\vec{u}, \vec{v}$ を用いて，$\vec{x} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$ と表わされるとき，λ_1，λ_2 を基底 $\vec{u}, \vec{v}$ に関する $\vec{x}$ の"成分"と呼ぶことにする．例えば，=(1, 0, 0)，$\vec{e_2}$ =(0, 1, 0)を基底とする部分ベクトル空間において，ベクトル $\vec{x}$ =(x, y, 0) は，$\vec{x} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ と表わされるから，$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ に関する $\vec{x}$ の"成分"はx, yとなる．

ベクトル $\vec{u}$ =(1, 1, 0)，$\vec{v}$ =(1, −1, 0)を基底とする部分ベクトル空間において，基底 $\vec{u}, \vec{v}$ に関するベクトル $\vec{x}$ =(5, 3, 0)の"成分"を求めよ．（空欄を埋めよ．）
「$\vec{x} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$ となるλ_1，λ_2を求める．
$5=\lambda_1+\lambda_2$
$3=\lambda_1-\lambda_2$　を解いて

λ_1=□，λ_2=□が求める"成分"となる．」

Check　Reset