← PC版は別頁

== 重積分の計算 ==

◇累次積分◇

区間 $a \leqq x \leqq b$ において不等式 $p(x) \leqq y \leqq q(x)$ を満たす xy 平面上の領域を K とする．K 上で定義される関数 $z=f(x\,,\,y)\ \geqq 0$ について，不等式 $0 \leqq z \leqq f(x\,,\,y)$ を満たす xyz 空間の領域（立体）を M とするとき，立体 M の体積を求めることを考える．

集合記号で表わすと次の領域となっている：

$K=\{(x,y)|a \leqq x \leqq b\,,\ p(x) \leqq y \leqq q(x)\}$

$M=\{(x,y,z)|\ (x,y) \in K\,,\ 0 \leqq z \leqq f(x,y)\}$

図２，図３において桃色で示した $x=t$ の断面の面積を $M(t)$ とすると，

$$M(t)=\int_{p(t)}^{q(t)} f(t,y)dy$$

M の体積を V とおくと，

$$V=\int_a^b \{\int_{p(t)}^{q(t)} f(x,y)dy\}dx \quad \cdots(1)$$

一方，領域 K 上の重積分は

$$V=\iint_K f(x,y)dxdy \quad \cdots(2)$$

で表わされるから，

$$\iint_K f(x,y)dxdy=\int_a^b \{\int_{p(t)}^{q(t)} f(x,y)dy\}dx$$

※　このように定積分を繰り返し行うこと（累次積分）により重積分の値を求めることができる．

※　上の説明では $f(x\,,\,y)\ \geqq 0$ の場合について，体積を求めたが，$f(x\,,\,y)$ が必ずしも正または0とは限らないとき重積分は体積を表わさないが，累次積分で求められる事情は同じである．

※　図４のように，領域 K の形によっては，$y=u$ の断面から求める方が求めやすいことがある．この場合は，

$$V=\int_c^d \{\int_{h(t)}^{k(t)} f(x,y)dx\}dy$$

で求められる．

図１

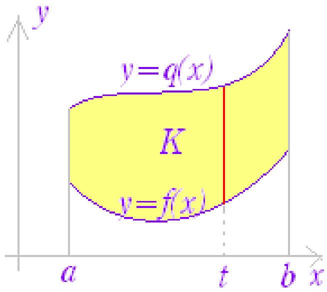


図２

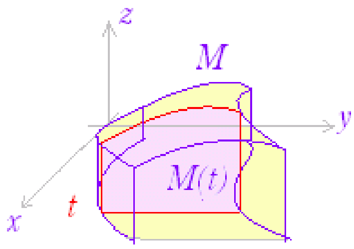


図３

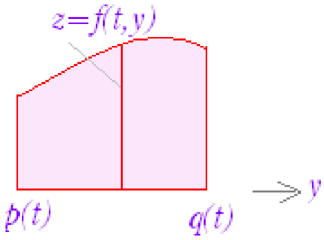
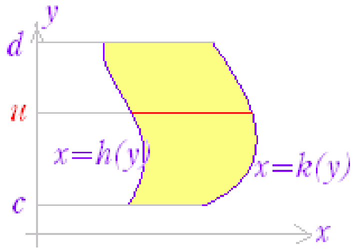


図４



例１

　右図のように，$0\leqq x\leqq a$， $0\leqq y\leqq b$， $0\leqq z\leqq c$ の区間にある直方体の体積は $V=abc$ であるが，これを重積分で確かめると

ア） $x=t$ の断面で切ると，

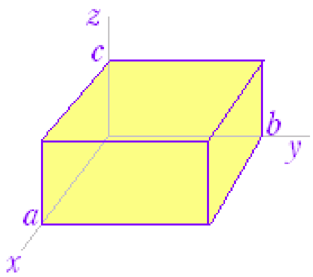
$$M(t)=\int_0^b cdy=\Big[cy\Big]_0^b=bc$$

$$V=\int_0^a\{\int_0^b cdy\}dx=\int_0^a bcdx=abc$$

イ） $y=u$ の断面で切ると，

$$M(u)=\int_0^a cdx=\Big[cx\Big]_0^a=ac$$

$$V=\int_0^b\{\int_0^a cdx\}dy=\int_0^b acdy=abc$$



例 2

　$K=\{\ (x,y)|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ \ 0 \leqq y \leqq 1\ \}$

　$M=\{\ (x,y,z)\ |\ (x,y) \in K\ ,\ 0 \leqq z \leqq xy\ \}$　で定義される立体の体積は,

$$V=\int_0^1\{\int_0^1 xydx\}dy=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2y\right]_0^1 dy$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}ydy=\left[\frac{y^2}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

一般に，$f(x,y)=g(x)h(y)$　のように，積の形に変数分離できるときは

$$\int_a^b\int_c^d g(x)h(y)dxdy$$

$$=\int_a^b g(x)dx\int_c^d h(y)dy$$

が成り立つ.

例

$$\int_a^b\int_c^d x^m y^n dxdy\ =\int_a^b x^m dx\int_c^d y^n dy$$

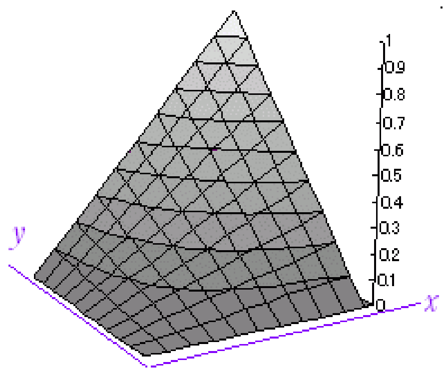
$$=(\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1})(\frac{d^{n+1}-c^{n+1}}{n+1})$$

だから

$$\int_0^1\int_0^1(Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F)dxdy$$

$$=\frac{A}{3}+\frac{B}{4}+\frac{C}{3}+\frac{D}{2}+\frac{E}{2}+F$$

$z=xy$　の曲面



例 3

　右図のように，$y=2x$　，　x　軸および直線　$x=1$　とで囲まれた図形上で定義される２変数関数　$z=xy$　と平面　$z=0$　とで囲まれる立体の体積

　すなわち,

　$K=\{\ (x,y)|\ 0 \leqq x \leqq 1,\ \ \ 0 \leqq y \leqq 2x\ \}$

　$M=\{\ (x,y,z)\ |\ (x,y) \in K\ ,\ 0 \leqq z \leqq xy\ \}$　で定義される立体の体積は,

ア）x 軸に垂直な断面で切り，y で積分した後に x で積分すれば

$$\int_0^1\{\int_0^{2x} xydy\}dx\ =\int_0^1\left[x\frac{y^2}{2}dy\right]_0^{2x}dx$$

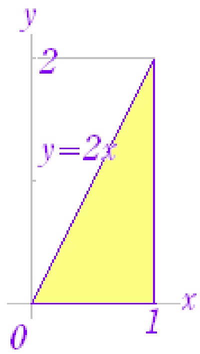
$$=\int_0^1\left[x\frac{4x^2}{2}\right]dx=\int_0^1 2x^3dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

イ）y 軸に垂直な断面で切り，x で積分した後に y で積分すれば

$$\int_0^2\left\{\int_{\frac{y}{2}}^1 xydx\right\}dy=\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{\frac{y}{2}}^1 dy$$

$$=\int_0^2\left(\frac{y}{2}-\frac{y^3}{8}\right)dy=\left[\frac{y^2}{4}-\frac{y^4}{32}\right]_0^2=\frac{1}{2}$$



例４

　右図のように，$y=x$ と $y=x^2$ とで囲まれた図形上で定義される２変数関数 $z=x+y$ と平面 $z=0$ とで囲まれる立体の体積

　すなわち，

　$K=\{\,(x,y)|\ 0\leqq x\leqq 1,\quad x^2\leqq y\leqq x\,\}$

　$M=\{\,(x,y,z)\ |\ (x,y)\in K\ ,\ 0\leqq z\leqq x+y\,\}$ で定義される立体の体積は，

ア）x 軸に垂直な断面で切り，y で積分した後に x で積分すれば

$$\int_0^1\left\{\int_{x^2}^{x}(x+y)dy\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x}dx$$

$$=\int_0^1\left\{\left(x^2+\frac{x^2}{2}\right)-\left(x^3+\frac{x^4}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left\{\left(\frac{3x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$$

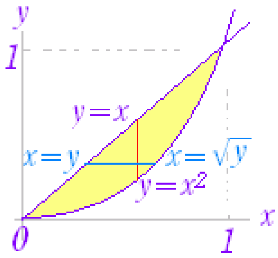
イ）y 軸に垂直な断面で切り，x で積分した後に y で積分すれば

$$\int_0^1\left\{\int_{y}^{\sqrt{y}}(x+y)dx\right\}dy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}+yx\right]_y^{\sqrt{y}}dy$$

$$=\int_0^1\left\{\left(\frac{y}{2}+y\sqrt{y}\right)-\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right)\right\}dy$$

$$=\int_0^1\left(\frac{y}{2}+y\sqrt{y}-\frac{3y^2}{2}\right)dy$$
$$=\left[\frac{y^2}{4}+\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{y^3}{2}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$$



問題

（※半角数字=1バイト文字で答えよ）

(1)

$$\iint_K 2y\,dxdy,\quad K=\{\,(x,y)|\ 0\leqq x\leqq 1,\ \ 0\leqq y\leqq 1\,\}$$

を計算せよ.

（原式）＝

Check Reset Help

(2)

$$\iint_K 3x\,dxdy,\quad K=\{\,(x,y)|\ 0\leqq x\leqq 1,\ \ 1-x\leqq y\leqq 1\,\}$$

を計算せよ.

（原式）＝

Check Reset Help

(3)

原点を中心とする半径 1 の円の上半分の領域を D とするとき，

$$\iint_D y^2 dxdy\,,\quad D=\{\,(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ 0\leqq y\,\}$$

を計算せよ．

なお，必要ならば次の公式を用いよ．

$\cos^2 t=\frac{1}{2}(\cos 2t+1)$　（半角公式）

$\cos^4 t=(\cos^2 t)^2=\{\frac{1}{2}(\cos 2t+1)\}^2$

$=\frac{1}{4}\{\cos^2 2t+2\cos 2t+1\}$

$=\frac{1}{4}\{\frac{1}{2}(\cos 4t+1)+2\cos 2t+1\}=\frac{1}{8}\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{3}{8}$

（原式）$=\frac{\pi}{\square}$

Check　Reset　Help

◇極座標◇

極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ により，$r\theta$ 平面上の領域 H を xy 平面上の領域 K に写す変数変換を考えると，

$$dxdy=|J|drd\theta$$

において，

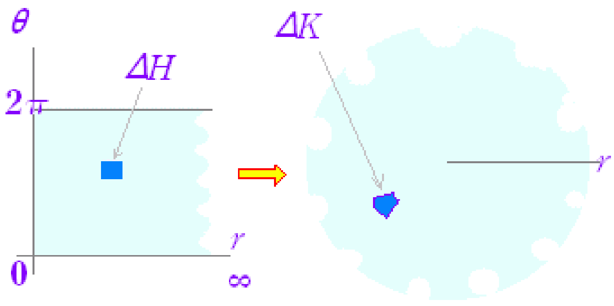
$$J=\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|J|=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

だから

$$\iint_K f(x,y)dxdy=\iint_H f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

が成り立つ.



上の問題(3)は極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を用いると，次のように計算できる

$$\iint_D y^2dxdy=\int_0^{\pi}\{\int_0^1 r^2\sin^2\theta\, rdr\}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sin^2\theta\int_0^1 r^2rdr$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\cos2\theta}{4}\right]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}$$

例　上の例２の結果を用いて次の式が導かれる.

xy 平面全体（$-\infty<x<\infty$，$-\infty<y<\infty$の範囲）を領域 K とするとき

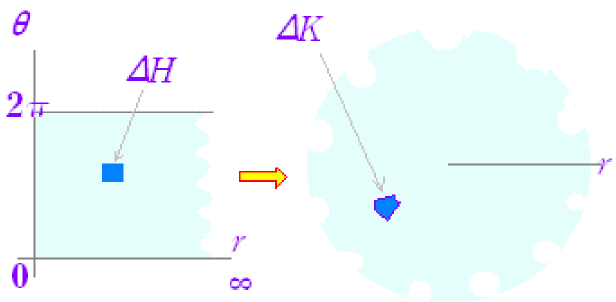
$$\iint_K e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi\ \cdots(1)$$

さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\cdots(2)[\text{ ガウスの公式 }]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\quad(a>0)\cdots(3)$$

（解説）



図のように，極座標より，$r\theta$ 平面上の領域 H を xy 平面上の領域 K に写す変数変換 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を考えると，

$dxdy=|J|drd\theta$

$|J|=r$

となるから,

$$\iint_K e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\iint_H e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$

（左辺）

$$=\iint_K e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=I$$

とおくと

（左辺）$=I^2$　（続く→）

（右辺）$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$

ここで

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)'=e^{-r^2}r$$

に注意すると

$$\int_0^{\infty}e^{-r^2}r\,dr=\int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)'dr$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}$$

（右辺）$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta=\left[\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi$

以上から, $I^2=\pi$

$I=\sqrt{\pi}$ →(2)

さらに, (3)の左辺において, $\sqrt{a}x=t$ とおいて置換積分を行うと,

$\sqrt{a}dx=dt$

x	$-\infty\to\infty$
t	$-\infty\to\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

次の(1)(2)を満たす関数 $f(x)$ を確率密度関数（または, 確率分布関数）という.

(1)　区間 $-\infty<x<\infty$ において, つねに $f(x)\geqq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$

（半角数字=1バイト文字で答えよ）

問題

(1)　関数 $f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}}$ が確率密度関数を表わすように, 定数 A の値を定めよ.

$A=\frac{1}{\sqrt{\square\,\pi}}$

Check　Reset　Help

(2)　関数

$$f(x)=Be^{-\frac{(x-m)2}{2\sigma 2}}\quad(\sigma>0)$$

が確率密度関数を表わすように，定数 B の値を定めよ．

$$B=\frac{1}{\sqrt{\square\ \pi}\,\sigma}$$

Check　Reset　Help

(3)

　原点を中心とする半径 1 の円で $0\leqq x$，$0\leqq y$ を満たす領域を D とするとき，

$$\int\int_D (x+y)dxdy,\ D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqq 1,\ 0\leqq x,\ 0\leqq y\}$$

を極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を用いて計算せよ．

（原式）$=\dfrac{\square}{\square}$

Check　Reset　Help