

泥縄式不動点定理の解説

—競争均衡, ナッシュ均衡の存在証明付き—

(第2版)

田中 靖人

同志社大学経済学部

E-mail: yasuhito@mail.doshisha.ac.jp

目次

1	はじめに (第2版)	3
2	スペルナーの補題 (2次元の場合)	4
3	スペルナーの補題 (一般の場合)	6
4	スペルナーの補題-別の証明	9
5	ブラウワーの不動点定理	13
6	交換経済における均衡の存在	15
7	宇沢の定理	18
8	企業の生産を含む経済の均衡について	20
9	ナッシュ均衡 (Nash equilibrium) について	21
10	付録 1: コンパクト集合とその性質	23
11	付録 2: 関数の連続性	29
12	付録 3: 直積集合における開集合	31
13	おまけ: ユークリッド空間の一般理論	33
13.1	ユークリッド空間と距離	33
13.2	距離空間	35
13.3	位相空間	37
13.4	閉集合	38
13.5	ハウスドルフ空間	39
13.6	ユークリッド空間のコンパクト集合に関する一般的な議論	39
13.7	点列と収束, 関数の最大・最小	41
13.8	近傍, 閉包, 内部	43
13.9	完備距離空間	44
13.10	ルベーグの補題と一様連続性	47
13.11	同相・同相写像	48
14	時間が余ったときの予備 1 — 角谷の不動点定理とナッシュ均衡	50

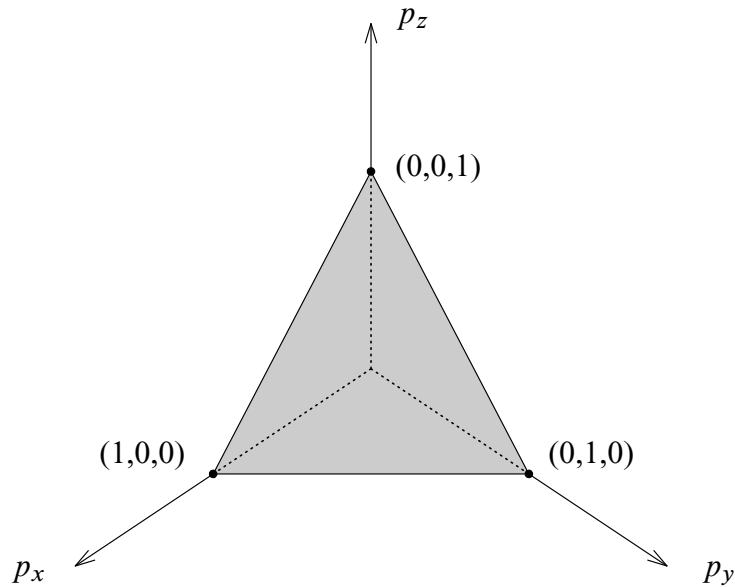


図1 3次元空間内の三角形

15	時間が余ったときの予備2 — Gale-Nikaido の補題	55
16	時間が余ったときの予備3 — ブラウワーの不動点定理による NTU (譲渡不可能効用) ゲームにおけるコアの存在証明	58

1 はじめに (第2版)

泥縄式と称するのは十分な準備をせずに経済の均衡を取り扱おうとし、そのためには数学のコンパクト集合の性質を理解しなければいけないということで付録でそれを取り上げ、さらにおまけで位相空間に遡って考えて行こうとしているからである。

2014年の初版で見つかった誤植はできるだけ修正したが、後ろの方を参照しなければ前の方の議論で理解できない箇所があるのは変わっていない。必要に応じて指示する。(2016年3月1日)

交換経済(財の生産を行わず、各消費者が持っている財の交換だけで成り立つ経済)における均衡、正確には均衡価格の存在を考える。財が3つ以上ある経済における均衡の存在を証明するにはブラウワーの不動点定理を用いる。

X_0, X_1, \dots, X_n の $n+1$ ($n \geq 1$) 財からなる交換経済がありそれぞれの価格を $p_i (\geq 0)$, $i = 0, 1, \dots, n$ とする。 $p_0 + p_1 + \dots + p_n = \bar{p}$ とし

$$\bar{p}_i = \frac{p_i}{\bar{p}}, i = 0, 1, \dots, n$$

と定義し $\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$ をあらためて p_0, p_1, \dots, p_n と書くと

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1 \tag{1}$$

が成り立つ。交換経済における消費者の需要（超過需要、自分の初期保有量を超える需要）は相対価格によって決まるのでこのようにして価格の表現を変えても需要は変わらない。ある消費者の各財の需要を x_i とすると予算制約式は

$$p_0x_0 + p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = 0$$

と表される（需要は超過需要であるから和がゼロになる）。両辺を $\bar{p} = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$ で割ると

$$\bar{p}_0x_0 + \bar{p}_1x_1 + \cdots + \bar{p}_nx_n = 0$$

となるから上記のように価格の表現を変えても予算制約式は変わらない。したがって効用を最大化する需要も変わらない。企業による生産を含む経済においても生産要素の価格も含めればやはり相対価格によって需要が決まる。このような性質は 0 次同次性と呼ばれる。 $n - 1$ 個までは財の価格がゼロでもよいが少なくとも 2 つの財の価格は正でなければならない。もしすべての価格あるいは 1 つの財以外の価格がゼロならばそれ以外（価格がゼロではない財以外）のどれかの財（あるいはすべての財）の需要が非常に大きくなりすぐに価格が正になると考えればよい。3 財の場合には財を X, Y, Z , 価格を p_x, p_y, p_z と表すことにしよう。そのとき (1) は p_x, p_y, p_z を座標軸とする 3 次元空間において $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ を頂点とする三角形の辺と内部からなる図形を表している。三角形自体は 2 次元の図形である（図 1 参照）。この三角形 (Δ とする) に含まれる点を同じ三角形 (これを Δ' とする) の点に対応させる写像 (関数) を考える。 Δ のある点は Δ' の異なる (異なる位置にある) 点に対応するかもしれないし、同じ点に対応するかもしれない。後者の場合その点は不動点であると言う。 Δ の 1 つの点は Δ' の 1 つの点に対応する。しかし Δ の異なる点が Δ' の同じ点に対応するかもしれない。また、この対応は連続であると仮定する。すなわち Δ 上のごく近くの点同士は Δ' のごく近くの点に対応する。

【注】 Δ 上で近くにある 2 点が Δ' 上では遠く離れた点に対応するかもしれない。しかし、写像が連続であれば Δ 上の 2 点の距離を十分に縮めることによって対応する Δ' 上の 2 点間の距離をいくらでも小さくできる。それが連続ということである。連続でなければ対応に飛びがあるので Δ 上の 2 点の距離をいくら縮めても Δ' 上の 2 点間の距離が小さくならない場合がある。

一般の場合には (1) は p_0, p_1, \cdots, p_n を座標軸とする $n + 1$ 次元空間において $(1, 0, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)$ を頂点とする多面体の表面と内部からなる図形を表している。4 次元なら三角形を面とする四面体 (三角錐) であるが、それ以上の次元のものはイメージできない。一般の場合にもその図形を Δ とし、同じように Δ' を定義して Δ から Δ' への連続な関数を考える。

2 スペルナーの補題 (2 次元の場合)

まず次の結果を証明する。

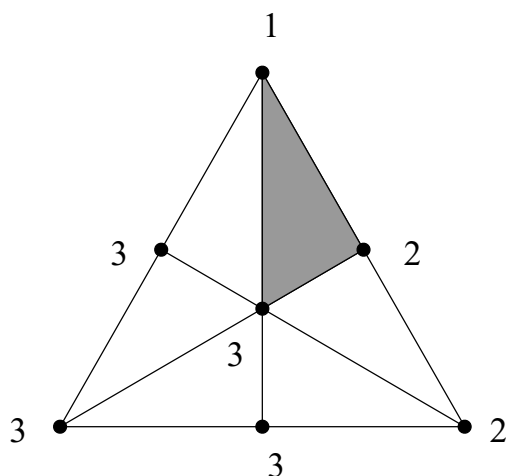


図2 三角形の分割

補題 1 (スペルナー (Sperner) の補題 (2次元の場合)). 上記の三角形 Δ の頂点, 各辺の中点, 三角形の重心を結んで三角形を分割する。そうすると 6 つの三角形に分れるが, それらをさらに辺の中点と重心をとって 6 つずつに分割する。すると $6 \times 6 = 36$ 個の三角形に分れるが, それらをさらに辺の中点と重心をとって 6 つずつに分割する。これを何度か繰り返してできた三角形の集まりを K とする。 K の三角形 (K に含まれる三角形, 以下同様) のそれぞれの頂点に次のルールによって番号をつける。

- (1). Δ (全体の大きい三角形) の頂点には 1,2,3 のいずれかの番号を 1 つずつつける。
- (2). K の頂点の内 Δ の辺に含まれているものについてはその辺の両端の点の番号のいずれかと同じ番号をつける。 Δ の内部の点には 1,2,3 のいずれかの番号をつける。

そのとき, K の三角形の中で各頂点に 1,2,3 すべての番号がつけられているものが少なくとも 1 つ存在する。図2 参照。網掛けされた三角形が補題を満たす。1 回分割してできた三角形の内互いに接するものは共通の辺全体で接している。それらの三角形の辺の中点と重心をとって再度分割するので 2 回分割してできた三角形の内互いに接するものも共通の辺全体で接する。以下同様。図3 参照。

証明. まず 1,2 の番号がついている Δ の辺に含まれる K の三角形の辺で 1,2 の番号がついているものの数が奇数であることを示す。当該の Δ の辺に含まれる点の数に関する数学的帰納法で証明する。両端の点しかなければ 1,2 と番号づけされているので 1 つである。両端の点以外の点が 1 つであるとするとその番号が 1 であっても 2 であっても 1,2 の番号がつく部分は 1 つである。その辺に含まれる両端の点以外の数が n 個の場合に 1,2 の番号がついているものの数が奇数であると仮定する。そこに 1 つ点を追加する。その点の番号が 1 であるとき, 両隣の点の番号がともに 2 ならば条件を満たす辺は 2 個増えるが, ともに 1 ならば変化しない。どちらにしても奇数は変ら

ない。その点の番号が 2 である場合も同様である。その点の番号が 1 で両隣の点の番号が 1 と 2 の場合には条件を満たす辺は 1 つ減って 1 つ増えるので変らない。その点の番号が 2 である場合も同様。以上によって条件を満たす辺の数が奇数であることが示された。

Δ を家、 Δ 以外の K の三角形をその家の部屋、1,2 の番号がつけられた K の三角形の辺をドアと見て、 Δ の外側からドアを開けて家に入り、さらにドアを開けて部屋を移動することを考える。同じドアは 2 度通らない。1,2 と番号づけされたドアが 2 つある部屋は通り抜けられる。そのようなドアを持たない部屋には入れない。3 つそのようなドアを持つ三角形はありえない。1,2,3 と番号づけされた三角形の部屋に到達すると出られなくなりそこがゴールである。また入ったドアとは別の Δ のドア (Δ の辺に含まれる K の三角形の辺の内 1,2 の番号がつけられたもの、以下同様) から出て行った場合もそこで移動は終わる。移動の経路を道と呼ぶ。以上によってあるドアから入った道の経路はただ 1 つに決まり、1,2,3 と番号づけされた三角形の部屋に到達するか、または別の Δ のドアから出て行って移動が終わるかどちらかであることがわかる。すべてのこのような道を考えそれらがことごとく入ったドアとは別の Δ のドアから出て行くような道であると仮定してみよう。1,2 と番号づけされた Δ の辺に含まれる K の三角形の辺の内 1,2 と番号づけされたもの (すなわち Δ のドア) は奇数個であった。各道がそのいずれかのドアから入り、別のドアから出て行くとする と 1 つドアが余る。道の経路はただ 1 つに決まっているので余ったドアから入った道が別のドアから出て行くことはない (その別のドアから入って道を逆にたどれば最初に入ったドアに到るはずである)。その道は 1,2,3 と番号づけされた三角形に到達せざるを得ないのでそのような三角形が少なくとも 1 つ存在することが証明された。図 3 を参照していただきたい。□

3 スペルナーの補題 (一般の場合)

次に一般的な場合を考える。

n 次元の Δ (n 次元単体と言う) を (三角形の分割と同じように) 分割して作った小さな n 次元単体の集まりを K とする。

[注] 3 次元空間内で $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ をもとに作った三角形は 2 次元であり、同様に $n + 1$ 次元空間で $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, \dots, 1)$ をもとに作った多面体は n 次元の図形である。なお 0 次元単体は点、1 次元単体は線分、2 次元単体は三角形、3 次元単体は四面体である。たとえば四面体の分割は以下のように進める。

- (1). まず四面体の面を構成する 4 つの三角形をそれぞれ図 2 のように分割する。
- (2). 次に四面体の重心 (だいたい真ん中と思えばよい) と分割してできた小さな三角形のそれぞれとから小さな四面体を作る。三角形の辺と四面体の重心によって作られる三角形が小さな四面体の面になる。その面が Δ の面に含まれていなければ (内部にあれば) 2 つの四面体はその面をはさんで接している。
- (3). こうして作られた小さな四面体のそれぞれを同じようにして分割する、ということを繰り返す。このときまず各四面体の面である三角形を分割するので、分割してできた四面

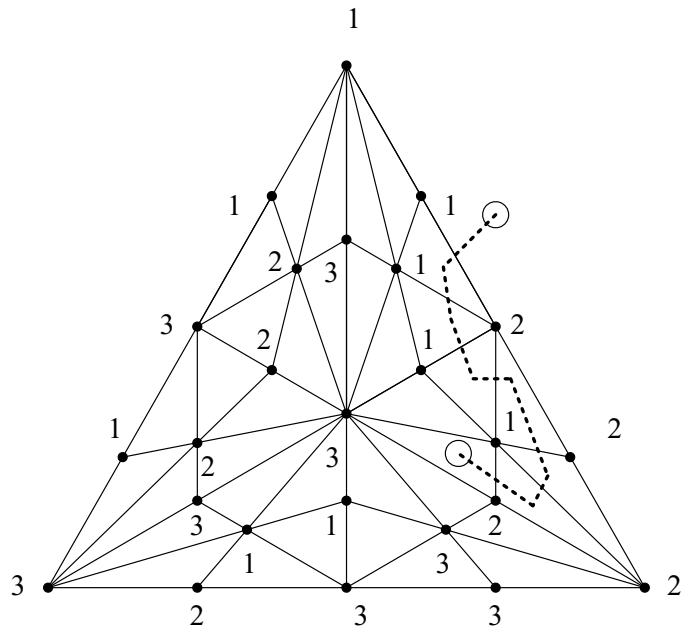


図3 スペルナーの補題

体同士は共通の面（三角形）全体で接する。

K の各頂点に対して以下のルールに基づいて 0 から n までの番号をつける。

- (1). Δ の頂点 ($n + 1$ 個ある) については 0 から n までの番号を各頂点につける（順序は問わない）。
- (2). K のある頂点 \mathbf{v} が Δ のある $n - 1$ 次元面 (Δ に含まれる $n - 1$ 次元単体, Δ が四面体なら三角形, 三角形なら辺) に含まれている場合には, その面のある頂点 (Δ の頂点でもある) と同じ番号を \mathbf{v} につける (\mathbf{v} は Δ の面の頂点であるとは限らず, Δ を分割してできた単体の頂点の中で Δ の面に含まれるものであるかもしれない)。
- (3). K のある頂点 \mathbf{v} が Δ に含まれる $n - 2$ 次元単体 (Δ が四面体なら辺) に含まれている場合には, その単体のある頂点と同じ番号を \mathbf{v} につける。
- (4). 以下同様。 Δ の内部の点には 0 から n までのいずれかの番号をつける。

補題 2 (スペルナーの補題 (一般の場合)). K の頂点に上記の番号づけのルールによって番号をつけるとき, K の n 次元単体の中で各頂点にちょうど 0 から n までの番号がつけられるものの個数は奇数である。

証明. Δ の次元に関する数学的帰納法で証明する。まず $n = 0$ の場合は番号は 0 だけしかなく, それ以上分割できない 0 次元単体の一つしかないので補題が成り立つのは明らかである。 $n = 1$ の場合は前の補題で証明している。次に $n - 1$ 以下の次元について補題が成り立つと仮定する。番号づ

けのルールにより、 $0, 1, \dots, n-1$ と番号づけされた K の $n-1$ 次元単体を含む Δ の $n-1$ 次元面は $0, 1, \dots, n-1$ と番号づけされた頂点を持つ Δ の $n-1$ 次元面のみであり、それは 1 つしかない。以下 2 次元の場合と同様の証明を行う。

Δ を家、 Δ 以外の K の n 次元単体（分割によってできたもの）をその家の部屋、 0 から $n-1$ までの番号がつけられた K の $n-1$ 次元単体をドアと見て、 Δ の外側からドアを開けて家に入り、さらにドアを開けて部屋を移動することを考える。同じドアは 2 度通らない。 0 から $n-1$ までの番号がつけられたドアが 2 つある部屋は通り抜けられる。そのようなドアを持たない部屋には入れない。3 つそのようなドアを持つ n 次元単体はありえない。

[注] 0 から $n-1$ までの番号がつけられた $n-1$ 次元単体の面を持つ n 次元単体のもう 1 つの頂点の番号が n であればドアは 1 つ、 n 以外ならばドアは 2 つある。

0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の部屋に到達すると出られなくなりそこがゴールである。また入ったドアとは別の Δ のドア（ Δ の $n-1$ 次元面に含まれる K の $n-1$ 次元単体の内 0 から $n-1$ までの番号がつけられたもの、以下同様）から出て行った場合もそこで移動は終わる。移動の経路を道と呼ぶ。以上によってあるドアから入った道の経路はただ 1 つに決まり、 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の部屋に到達するか、または別の Δ のドアから出て行って移動が終わるかどちらかであることがわかる。すべてのこのような道を考える。帰納法の仮定により 0 から $n-1$ までの番号がつけられた Δ の $n-1$ 次元面に含まれる K の $n-1$ 次元単体の内 0 から $n-1$ までの番号がつけられたもの（すなわち Δ のドア）は奇数個であった。いずれかのドアから入って別のドアから出て行く道は 2 つの Δ のドアを通るが、 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の部屋に到達する道は 1 つの Δ のドアしか通らない。道の経路はただ 1 つに決まっているので 1 つのドアは 1 つの道しか通らない。したがって 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体に到達する道の数は奇数でなければならない（1 つの Δ のドアから入って別の Δ のドアから出て行く道は 2 つのドアを通るので）。よって、 Δ のドアから入って到達できる 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の数は奇数である。

しかし Δ のドアから入って道をたどっても行き着けない 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体（部屋）があるかもしれない。その数が奇数個ならば全体として偶数個になってしまう。そのような部屋の 1 つから出発する。その部屋の 0 から $n-1$ までの番号がつけられたドアを通過して隣の部屋に移る。そこが 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体であればそこで道は終わる。そうでなければ別のドアがあるのでそこから出てまた隣の部屋に移る。そこが 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体であればそこで道は終わる。そうでなければ別のドアがあるのでそこから出てまた隣の部屋に移る、ということを繰り返すと途中で行き止まりになるかそれとも Δ のドアを通過して Δ から出て行くかいずれかである（そのような道も同じドアを 2 度通らないのでもとの部屋には戻らない）。後者の場合、出発した 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の数はすでに数えられている。一方前者の場合、出発した部屋とたどり着いた部屋の 2 つの部屋、すなわち 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体が 2 つ存在することになる。その数の合計は偶数であり、また Δ のドアから入った道を通ってはその部屋にたどり着けない。以上によって 0

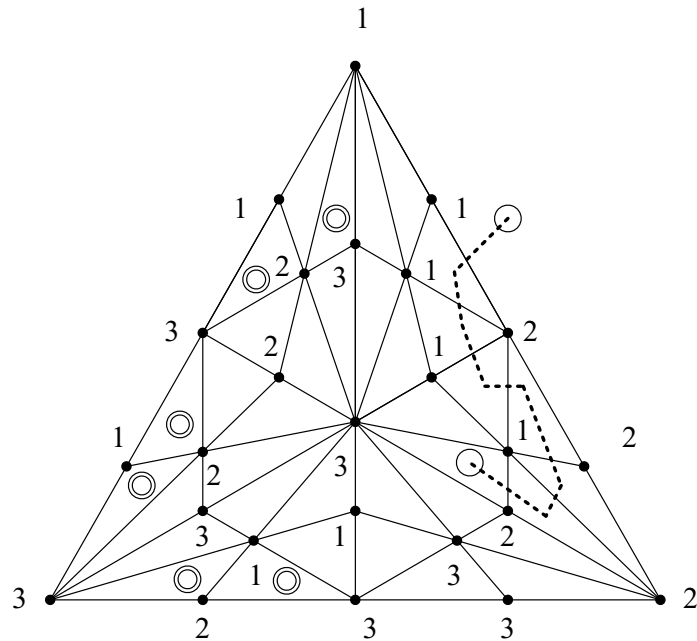


図4 スペルナーの補題2

から n までの番号がつけられた n 次元単体の数が全体として奇数個であることが証明された。

数学的帰納法を使うために一般的な場合の証明では 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体が存在することを示すだけでなく、それが奇数個であることを示す必要があった。

2次元ではあるが図4が参考になるかもしれない。◎をつけてあるのが Δ のドアから入ってはたどり着けない部屋である。□

0 から n までの番号がつけられるものの個数が奇数であるということは少なくとも1個はそのようなものが存在することを意味する。

4 スペルナーの補題-別の証明

スペルナーの補題の別の証明を紹介する。まずグラフ理論と呼ばれる理論のごく簡単な結果を示す。

点および2点間を結ぶ辺の集合をグラフと呼ぶ。図5がグラフの例である。辺は線分ではなく曲線でもよい。ある点から出ている辺の数をその点の次数と呼ぶと次の補題が得られる。

補題3 (握手補題 (Handshaking lemma)). 任意のグラフにおいて次数が奇数であるような点の個数は偶数である。

証明. 各辺は2点間を結ぶものであるからすべての点の次数を合計すると、各辺を二度ずつ数えることになるので偶数である。次数が偶数の点の個数が奇数でも偶数でもそれらの次数の和は偶数で

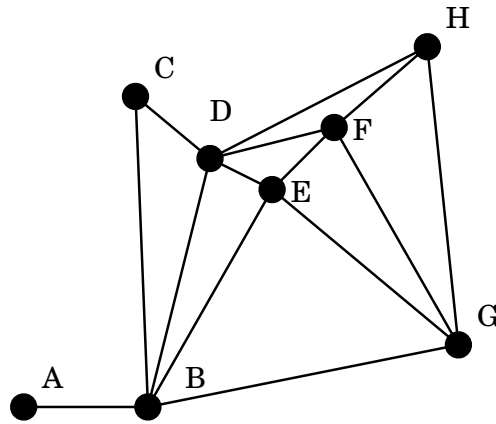


図5 グラフの例

あるから、すべての点の次数の和が偶数であるためには次数が奇数であるような点の個数は偶数でなければならない。

「握手補題」と呼ぶのは以下のような理由による。グラフの点を人、辺を二人の人が握手をする関係を表すものとする。したがって各点の次数はその点が表す人が何人の人と握手をするかを意味する。握手は必ず二人であるから各人の次数、すなわち握手をする相手の数を合計すると偶数になる。偶数の相手と握手をする人の数が奇数でも偶数でもそれらの次数の和は偶数である。したがって握手をする相手の数の合計が偶数となるためには奇数の相手と握手をする人の数は偶数でなければならない。□

これを用いてスペルナーの補題を証明する。前の節では単体の重心をとり、頂点と重心を結ぶ線分によって単体を分割していったが（重心分割）、ここでは単体の面（2次元単体、すなわち三角形の場合には辺）に平行な面（2次元の場合は線）を描くことによって単体を分割する。三角形の例を図6に示してある。各方向に4本の線を引いて三角形を分割している。重心分割では分割してできた小さな単体（小単体）の重心をとってさらに分割を繰り返すことによってより細かい分割を得たが、ここでは単体の面に平行に描く面の数を増やすことによってより細かく分割する。 n 次元単体 Δ を上記の方法で分割して作った n 次元小単体の集まりを K とする。 K の各頂点に対して以下のルールに基づいて0から n までの番号を付ける。

[注] n 次元単体 Δ とは $n+1$ 個の点 $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$ を頂点とし、それらの頂点を線、面で結んで作られる図形（これらの点の凸包（convex hull））である。

- (1). Δ の頂点（ $n+1$ 個ある）については0から n までの番号を各頂点に付ける。本来順序は問わないが後の議論の都合上 $(1, 0, \dots, 0)$ は0, $(0, 1, 0, \dots, 0)$ は1, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$ は n というように番号付けをする。つまり第 k 番目の座標が1で他がすべて0の点に $k-1$ とい

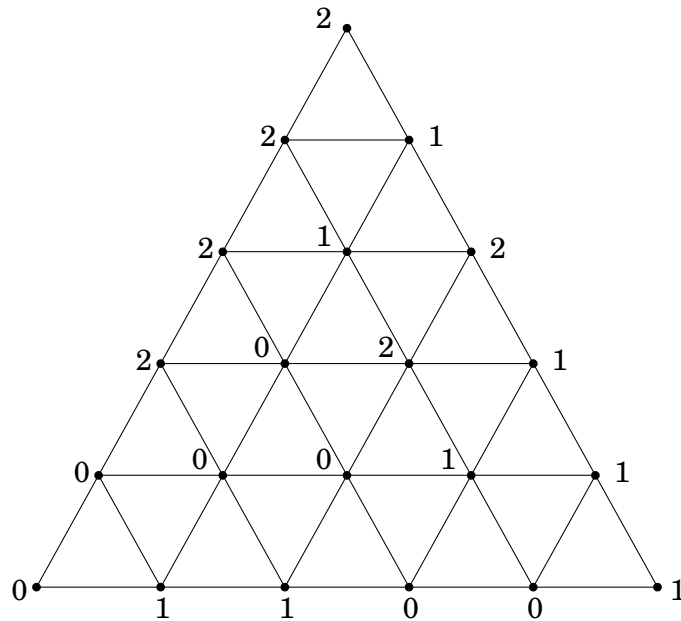


図6 三角形の分割と頂点の番号付け

う番号を付ける。

- (2). K のある頂点 \mathbf{v} が Δ のある $n-1$ 次元面 (Δ に含まれる $n-1$ 次元単体, Δ が四面体なら三角形, 三角形なら辺) に含まれている場合には, その面の頂点 (Δ の頂点でもある) のいずれかと同じ番号を \mathbf{v} に付ける (\mathbf{v} は Δ の面の頂点であるとは限らず, Δ を分割してできた単体の頂点の中で Δ の面に含まれるものであるかもしれない)。
- (3). K のある頂点 \mathbf{v} が Δ に含まれる $n-2$ 次元単体 (Δ が四面体なら辺) に含まれている場合には, その単体の頂点のいずれかと同じ番号を \mathbf{v} に付ける。
- (4). 以下同様。 Δ の内部の点には 0 から n までのいずれかの番号を付ける。

図6には番号付けの例も示してある。

補題4 (スペルナーの補題). K の頂点に上記の番号付けのルールによって番号を付けるとき, K の n 次元単体の中で各頂点にちょうど 0 から n までの番号が付けられるものの個数は奇数である。

証明. Δ の次元に関する数学的帰納法で証明する。まず $n=0$ の場合は番号は 0 だけしかなく, それ以上分割できない 0 次元単体の一つしかないので補題が成り立つのは明らかである。

$n=1$ の場合は線分であるが, 両端の点にそれぞれ 0 と 1 の番号が付けられ, その線分を分割してできた点には 0 か 1 のいずれかの番号が付けられている。 0 の番号がついた端の点から出発して進んで行くと最後の点が 1 であるから奇数回番号が変わらなければならない。偶数回ならもとの 0 に戻ってしまう。番号が変わったところで両端が 0 と 1 の番号を持った小さい線分 (1 次元小単体) が現れるから, その個数は奇数個である。

これをもとに 2 次元の場合を考える。上で説明したように三角形を分割してあるものとする。も

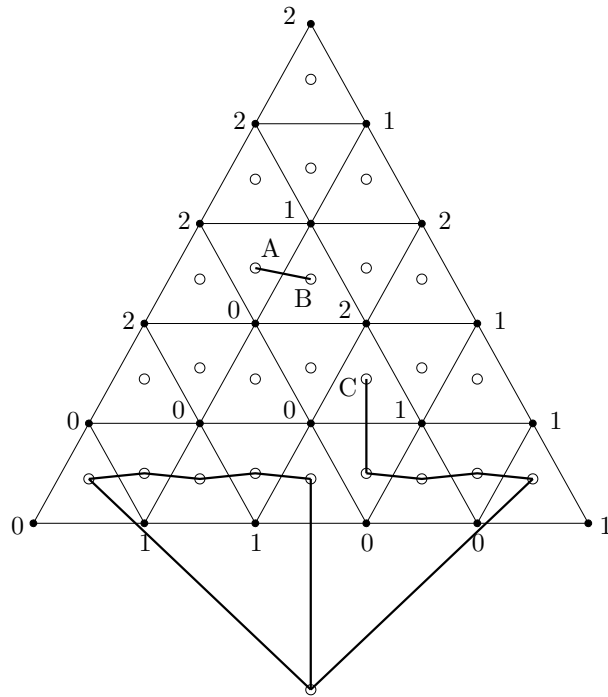


図7 スペルナーの補題3

との単体 Δ の両端の番号が 0 と 1 である辺をとる。図7では底辺である。1次元の場合の結果からこの辺を分割してできた線分で 0 と 1 の番号を持つものは奇数個ある。この辺の下（三角形の外）に点を一つとり，分割してできた各三角形（小単体）の中に一つずつ点をとる。二つの点が 0 と 1 の番号を持つ辺をはさんで向かい合っているときにこれらの 2 点を結ぶ辺を描き，そうでない場合には結ばないとすると図7に描かれたグラフが得られる。白い丸がグラフの点，太い線がグラフの辺である。 0 と 1 の番号を持つ Δ の辺に含まれる 0 と 1 の番号を持つ K の三角形の辺は奇数個であるから，三角形の外側の点から引かれる辺の数は奇数であり，この点は奇数の次数を持つ。握手補題によって次数が奇数であるようなグラフの点は偶数個あるから三角形に含まれるグラフの点の中に少なくとも一つ奇数の次数を持つ点がある。グラフの点は K の三角形の中にあるのでその三角形が両端の番号が 0 と 1 であるような辺を一つ持てばその点の次数は 1 ，二つ持てば 2 ，一つも持たなければ 0 である。三つ持つことはない。ある点の次数が奇数であればそれは 1 でなければならない，そのときその点が含まれる三角形の頂点の番号は 0 ， 1 ， 2 である。図7の点 A ， B ， C を含む三角形が 0 ， 1 ， 2 と番号付けされた頂点を持つ三角形であり，これらの点の次数は 1 である。

3次元以上の場合も同様にして証明される。 $n-1$ 以下の次元について補題が成り立つと仮定する。 n 次元単体 Δ の 0 から $n-1$ までの番号を持つ頂点からなる面をとる。この面に含まれる K の $n-1$ 次元小単体で 0 から $n-1$ までの番号を持つものは奇数個ある。この面の外側に点を一つとり，分割してできた各 n 次元小単体の中に一つずつ点をとる。二つの点が 0 から $n-1$ までの番

号を持つ面をはさんで向かい合っているときにこれらの2点を結ぶ辺を描き、そうでない場合には結ばないとする。一つのグラフが得られる。0から $n-1$ までの番号を持つ Δ の面に含まれる0から $n-1$ までの番号を持つ K の $n-1$ 次元小単体は奇数個であるから、 Δ の外側の点から引かれる辺の数は奇数であり、この点は奇数の次数を持つ。握手補題によって次数が奇数であるようなグラフの点は偶数個あるから Δ に含まれるグラフの点の中に少なくとも一つ奇数の次数を持つ点がある。グラフの点は K の n 次元小単体の中にあるのでその小単体が各頂点の番号が0から $n-1$ までであるような面を持つてばその点の次数は1、二つ持つてば2、一つも持たなければ0である。三つ以上持つことはない。ある点の次数が奇数であればそれは1でなければならず、そのときその点が含まれる小単体は0から n まで番号付けされた頂点を持つ。

0から $n-1$ までの番号が付けられた $n-1$ 次元単体の面を持つ n 次元単体のもう1つの頂点の番号が n であれば0から $n-1$ までの番号を持つ面は1つ、 n 以外ならば2つある。

以上で証明が終わった。

□

5 ブラウワーの不動点定理

スペルナーの補題を用いて次の定理を得る。この定理の証明は2次元の場合も一般的な場合もほとんど同じである。一般の場合がわかりにくければ0を x 、1を y 、2を z として3財のケースに直して考えていただきたい。次の交換経済の均衡の証明も同様である。

定理 1 (ブラウワー (Brouwer) の不動点定理). Δ から Δ' への連続な写像 f は不動点を持つ。

証明. Δ を何回か (m 回) 分割してできた単体の頂点の座標を (x_0, x_1, \dots, x_n) で表す。 $x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$ かつ $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$ である。この (x_0, x_1, \dots, x_n) が f によって $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ に対応するとしよう。もちろん $x'_0 + x'_1 + \dots + x'_n = 1$ である。各頂点に次のようにして番号をつける。

- (1). $x'_0 < x_0$ ならば (x_0, x_1, \dots, x_n) に番号 0 をつける。
- (2). $x'_0 \geq x_0$, かつ $x'_1 < x_1$ ならば (x_0, x_1, \dots, x_n) に番号 1 をつける。
- (3). $x'_0 \geq x_0, x'_1 \geq x_1$, かつ $x'_2 < x_2$ ならば (x_0, x_1, \dots, x_n) に番号 2 をつける。
- (4). 以下同様で、一般的には $x'_i < x_i$ となる最小の $i (i = 0, 1, \dots, n)$ の番号をつける

もしどの番号もつかない点があるとする。すべての $i (i = 0, 1, \dots, n)$ について $x'_i \geq x_i$ であるが、 $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$ かつ $x'_0 + x'_1 + \dots + x'_n = 1$ であるからすべての $i (i = 0, 1, \dots, n)$ について $x'_i = x_i$ でなければならず、その点は不動点となる。そうであれば証明は終わりなのですべての点に番号がつくものとして議論を進める。

まず Δ の頂点の対応を考える。

- (1). $(1, 0, 0, \dots, 0)$ が $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ に対応するとする。もし $x'_0 = 1$ ならばこの点が不動点と

なる。したがって $x'_0 < 1$ が成り立つので $(1, 0, 0, \dots, 0)$ の番号は 0 である。

- (2). $(0, 1, 0, \dots, 0)$ が $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ に対応するとする。もし $x'_1 = 1$ ならばこの点が不動点となる。 $x'_0 \geq x_0$ かつ $x'_1 < 1$ が成り立つので $(0, 1, 0, \dots, 0)$ の番号は 1 である。
- (3). $(0, 0, 1, \dots, 0)$ が $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ に対応するとする。もし $x'_2 = 1$ ならばこの点が不動点となる。 $x'_0 \geq x_0$, $x'_1 \geq x_1$ かつ $x'_2 < 1$ が成り立つので $(0, 0, 1, \dots, 0)$ の番号は 2 である。
- (4). 以下同様。

次に $x_n = 0$ であるような $n - 1$ 個の点から構成される Δ の $n - 1$ 次元面である $n - 1$ 次元多面体 ($n = 3$ ならば三角形) を考え、それに含まれる点 $(x_0, x_1, \dots, 0)$ が $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ に対応するとする。 $x_n = 0$ なので $x'_n < x_n$ とはならないから番号 n はつかず、 $(x_0, x_1, \dots, 0)$ の番号は 0 から $n - 1$ までのいずれかである。同様にして $(x_0, x_1, \dots, 0, x_n)$ の番号は $n - 1$ を除くいずれか、 $(0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ の番号は 0 を除くいずれか、以下同様であることが示される。次に $x_{n-1} = x_n = 0$ であるような点から構成される Δ に含まれる $n - 2$ 次元多面体 ($n = 3$ ならば辺) を考えそれに含まれる点 $(x_0, x_1, \dots, 0, 0)$ が $(x'_0, x'_1, \dots, x'_{n-1}, x'_n)$ に対応するとすると、 $x_{n-1} = x_n = 0$ なので $x'_n < x_n$ あるいは $x'_{n-1} < x_{n-1}$ とはならないから番号 n , $n - 1$ はつかず、 0 から $n - 2$ までのいずれかの番号がつく。以下同様である*¹。これら以外の点 (Δ の内部の点) には 0 から n までのいずれかの番号がつく。この番号のつけ方はスペルナーの補題の前提となっている番号づけと同じであるから 0 から n までのすべての番号づけを持った n 次元単体が存在する (複数あるかもしれないがその内の 1 つをとる)。そのような n 次元単体の頂点を

$$(x_0^{m,0}, x_1^{m,0}, \dots, x_n^{m,0}), (x_0^{m,1}, x_1^{m,1}, \dots, x_n^{m,1}), \dots, (x_0^{m,n}, x_1^{m,n}, \dots, x_n^{m,n})$$

とする (m は Δ の分割の回数)。それぞれ $0, 1, \dots, n$ の番号がついている。 1 から始まる m の値のそれぞれに上記の n 次元単体が存在する。したがって 0 から n までの各頂点について m の値に対応した点列ができる。 Δ は範囲の決まった (有界な) 領域であり、 m の値は無限に続くからそれぞれの点列はある 1 点に限りなく近づいて行くかまたはある点 (複数あるかもしれない) に繰り返し近づいたり遠ざかったりするかどうかである。後者の場合ある点に近づいて行く部分だけを (もとの点列と同じ順に) とって新たな (無限の) 点列 (「部分列」と呼ぶ) とし、前者の場合には上記の点列そのものをとると、それぞれの点列は極限となるある 1 点に収束する (点列がある極限に収束するとは限りなく近づいて行くということ)*²。 m の値を大きくして行く、すなわちこのような分割を繰り返して行くと分割してできる 1 つ 1 つの単体は小さくなって行き、分割を際限なく続ければ各単体が 1 点に近づいて行く。したがって m が十分に大きくなれば上記の $n + 1$ 個の点列同士が限りなく近くなって行くので、その内のある点列が収束するならば、他の点列もその極限のすぐ近くの点

*¹ たとえば $x_0 = x_2 = x_5 = 0$ ならば $0, 2, 5$ 以外の番号がつく。

*² 限りなく近づくと、任意の、どんな小さな $\varepsilon > 0$ についても、点列のある番号以上の部分が極限から ε の範囲にあるということ。繰り返すが、近づいたり遠ざかったりする場合は近づいて行く部分だけをとって部分列とする。厳密には「コンパクトな集合におけるすべての点列は収束する部分列を持つ」という定理が必要であるが、付録 1 で解説する。

に収束し、極限同士も同一のある点 (x_0, x_1, \dots, x_n) に限りなく近づく^{*3}。これが不動点であることを示す。 f によって $i = 0, 1, \dots, n$ について $(x_0^{m,i}, x_1^{m,i}, \dots, x_n^{m,i})$ が $(x_0'^{m,i}, x_1'^{m,i}, \dots, x_n'^{m,i})$ に対応し、 (x_0, x_1, \dots, x_n) が $(x_0', x_1', \dots, x_n')$ に対応するとする。 $(x_0^{m,0}, x_1^{m,0}, \dots, x_n^{m,0})$ の番号は 0 であるから $x_0'^{m,0} < x_0^{m,0}$ である。 f は連続なので m を十分に大きくすれば $(x_0^{m,i}, x_1^{m,i}, \dots, x_n^{m,i})$ と (x_0, x_1, \dots, x_n) がごく近くにあるとき $(x_0'^{m,i}, x_1'^{m,i}, \dots, x_n'^{m,i})$ と $(x_0', x_1', \dots, x_n')$ もごく近くになるようにすることができる。したがって $x_0' \leq x_0$ が成り立つ。

[注] $(x_0^{m,i}, x_1^{m,i}, \dots, x_n^{m,i})$ が (x_0, x_1, \dots, x_n) に接近して行く過程においては常に $x_0'^{m,0} < x_0^{m,0}$ であるが、極限においては等号 ($x_0' = x_0$) が成り立つ可能性がある。

同様にして $x_1' \leq x_1, \dots, x_n' \leq x_n$ を得る。一方 $x_0 + x_1 + \dots + x_n = x_0' + x_1' + \dots + x_n' = 1$ であるから $(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0', x_1', \dots, x_n')$ となり、 (x_0, x_1, \dots, x_n) は不動点である。□

6 交換経済における均衡の存在

定理 1 を用いて次の結果を証明する。

定理 2 (交換経済における均衡の存在). $n + 1$ 個の財 X_0, X_1, \dots, X_n からなる交換経済において各消費者 (消費者の数は有限である) の需要が価格について連続であるとする (価格のわずかな変化に対して需要が大きくは変化しない)。価格 (ベクトル) が (p_0, p_1, \dots, p_n) のときの各財の需要 (超過需要) を $f_i(p_0, p_1, \dots, p_n)$, $i = 0, 1, \dots, n$ で表すと次の式が成り立つ。

$$p_0 f_0 + p_1 f_1 + \dots + p_n f_n = 0 \text{ (ワルラスの法則)}$$

f_i は X_i 財についての各消費者の需要の合計に等しい。交換経済においては各消費者について各財の需要 (超過需要) の金額の合計がゼロに等しくなければならず (予算制約), それらをすべて足し合わせると上の式が得られる。

このとき、すべての財 ($i = 0, 1, \dots, n$) について $f_i(p_0, p_1, \dots, p_n) \leq 0$ (超過需要がゼロであるか、または負の超過需要すなわち超過供給が存在する) を満たす均衡価格 (ベクトル) $(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*)$ が存在する。

証明. (p_0, p_1, \dots, p_n) から $n + 1$ 個の実数の組 $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ へのある関数を考えそれらが次のように表されるものとする。

$$v_i = p_i + f_i, \quad f_i > 0 \text{ のとき}$$

^{*3} ちょっと説明がしつこいが、各頂点の点列から部分列をとる際に、同一の単体から部分列を構成する点を選んだとすると、その点列の内の 1 つが収束するときに、単体が限りなく小さくなるので他の点列も収束する。さらにその収束する極限は同一の点に近づく。1 つの収束する点列のある番号以上の部分が極限から $\frac{\varepsilon}{3}$ の距離以内であり、単体の頂点間の距離も $\frac{\varepsilon}{3}$ 以内であれば、他の点列の同じ番号以上の部分も最初の点列の極限と同じ単体の対応する頂点から ε の距離以内になる。

$$v_i = p_i, f_i \leq 0 \text{ のとき}$$

すべての財について同様。この (v_0, v_1, \dots, v_n) をもとに次のような Δ から Δ' への関数 $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ を作る。

$$\varphi_i(p_0, p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{v_0 + v_1 + \dots + v_n} v_i$$

すべての財について同様。これらについて $\varphi_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$ かつ

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_n = 1$$

が成り立つから、 $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ は Δ' 上の点である。また f_i が連続であるから φ も連続である。したがってブラウワーの不動点定理により

$$(\varphi_0(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*), \varphi_1(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*), \dots, \varphi_n(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*)) = (p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*)$$

を満たす $(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*)$ が存在する。すべての i について $v_i \geq p_i$ であるから、 φ と v の関係によってある $\lambda \geq 1$ に対して、すべての i について $v_i(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*) = \lambda p_i^*$ が成り立つ。以下では $\lambda = 1$ を示す。 $\lambda > 1$ と仮定してみよう。すると、 $p_i^* > 0$ であるときには $v_i(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*) > p_i^*$ 、すなわち $f_i(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*) > 0$ となる（すべての財について同様）。一方、すべての i について $p_i^* \geq 0$ であり、それらの和が1であるからいずれかは厳密に正である。そうすると $p_0^* f_0 + p_1^* f_1 + \dots + p_n^* f_n > 0$ となりワルラスの法則と矛盾する。したがって $\lambda = 1$ であり $v_0 = p_0^*, v_1 = p_1^*, \dots, v_n = p_n^*$ および $f_i(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*) \leq 0$ が導かれる。□

すべての i について $f_i(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*) \leq 0$ であり、かつ $p_0^* f_0 + p_1^* f_1 + \dots + p_n^* f_n = 0$ であるということは $p_i^* f_i(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*) \leq 0$ （すべての財について）であることを意味するから、 $p_i > 0$ のときには $f_i(p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*) = 0$ である。したがって均衡価格においては常に需要がゼロに等しいかあるいは超過供給が存在しており、正の価格を持つ財（普通はそうだが）については需要はゼロでなければならない。

価格がゼロで超過供給が存在する可能性はあるが、それはよほど誰も欲しがらない財か有り余るほどに存在する財である。価格がゼロなら需要（超過需要）が正になるとするとすべての財の均衡価格は正である。

v と φ の式を見ると需要が正の（超過需要が存在する）財の価格が引き上げられてそうでない財の価格が引き下げられるような調整が行われるように見えるが、そういう趣旨ではない。この議論では均衡の安定性までは考えていない。超過需要が存在するような価格は φ の不動点とはならず、不動点となる価格においては超過需要が存在しない、というのが φ の不動点が意味するところである。

■参考：需要の連続性について まず人々の選好の連続性について説明する。2財の場合を考えよう（3財以上の場合についても同様の議論が可能である）。X財、Y財の消費量の組として $A = (x^A, y^A)$, $B = (x^B, y^B)$ をとり、ある消費者が B より A を（厳密に、つまり無差別ではな

く)好むものとする。そのとき A, B それぞれを含む消費量の組の集合 (境界を含まない開集合) \bar{A}, \bar{B} に含まれるすべての組 A', B' について、この消費者が B' より A' を好むように \bar{A}, \bar{B} がとれるならばこの消費者の選好は連続である。通常は \bar{A}, \bar{B} としてそれぞれ A, B のごく近く (各財の消費量がわずかしか違わない) の消費量の組の集合をとる^{*4}。これは消費者の選好が急に変わらない。あるいは選好に飛びがないということを意味する。

[注] 説明を繰り返すと、 B より A が好まれるときに B のすぐ近くの消費より A のすぐ近くの消費の方が好まれるということである。 A, B それぞれからある程度離れると互いに無差別な消費の組が現れ、さらに離れると逆転するかもしれないが、無差別になるものよりもさらに A, B に近い消費の組をとれば A に近い方が好まれる。

消費者の選好がこの意味で連続であり、かつ与えられた予算制約式のもとで効用を最大化する需要 (消費量の組) がただ 1 つに決まる (無差別曲線が凸であればそうである) ならば需要は価格について連続であることが言える。連続ではないと仮定してみよう。価格の組 (ベクトル) を $\mathbf{p} (= (p_x, p_y))$ として \mathbf{p} の (無限の) 列が \mathbf{p}^* に近づいて行き、 \mathbf{p} および \mathbf{p}^* のときの需要が A, A^* であるとする。もし連続でなければ A が A^* に近づいて行かず (需要が連続ならば A^* に近づいて行く)、別の需要 B^* に近づいて行く。

[注] \mathbf{p} の列が \mathbf{p}^* に限りなく近づいて行くときに A が B^* に近づいたり離れたりする場合には B^* に近づいて行く部分だけをとって \mathbf{p} の列と考える^{*5}。

すべての A において予算制約式が (価格 \mathbf{p} のもとで) 成り立つから B^* においても (価格 \mathbf{p}^* のもとで) 成り立つ (予算制約式の左辺は一次式であるから連続であり、 \mathbf{p}^* にごく近い価格における需要は B^* にごく近くなっているから^{*6})。もちろん A^* においても予算制約式は成り立つ (A^* は価格が \mathbf{p}^* のときの需要である)。一方、ある価格のもとで消費者が選ぶ需要はただ 1 つに決まるからこの消費者は B^* より A^* を好む。選好の連続性により A^*, B^* それぞれのごく近くの消費量の組の集合 \bar{A}, \bar{B} に含まれる組 A', B' についても B' より A' を好む。 \mathbf{p} が \mathbf{p}^* に十分に近づいていけばそのときの需要 A は \bar{B} に含まれるからこの消費者は A より A^* を (厳密に) 好む。 A^* よりほんの少しだけ消費量が少ない (したがって予算が少し余る) が、やはり A より好まれる消費量の組 C をとると、 C は \mathbf{p}^* にごく近い \mathbf{p} においても予算を少し余らせながら、なおかつ A より好まれる。しかし、価格 \mathbf{p} において消費者が効用を最大化するように A を選んでいたはずだからこれは矛盾である。よって需要は価格について連続でなければならない。

^{*4} A, B の十分近くの集合をとれば上の条件が成り立つようにできるということである。

^{*5} 詳細は付録 1 を参照。ある財の価格がゼロに近づいて行って需要が無限大になる場合、供給 (初期保有量の合計、生産を含めても同様) は有限と考えられるのでゼロの価格では均衡にならないから、そのような財の価格は正であると仮定してもよいだろう。一方、価格がゼロに近づいて行って需要がある有限の値に近づいて行く場合は価格ゼロで均衡になる可能性があるが、消費量が増えれば増えるほど効用が大きくなるという経済学の通常的な仮定 (非飽和性) と矛盾する。しかし一応本稿ではそのような場合も含むものとする。

^{*6} あるいは予算制約式を満たす需要が B^* にいくらでも近くなるように価格を (\mathbf{p}^* のごく近くで) 選ぶことができる。

■連続ではない選好の例：辞書式順序 常識的な選好は連続であるが、連続ではない選好を考えることもできる。その代表的な例が辞書式順序にもとづく選好である。X財、Y財の消費量の組を (x, y) で表し、 $A = (x^A, y^A)$ 、 $B = (x^B, y^B)$ について $x^A > x^B$ ならばY財の消費量に関係なくAがBより好まれ、 $x^A < x^B$ ならばBがAより好まれ、 $x^A = x^B$ のときにだけY財の消費量を比べて多いほうが好まれる（Y財の消費量も等しければ無差別）というような選好が辞書式順序にもとづく選好である。辞書に単語を並べる順番を決める方法と同じなのでその名がある。この選好は連続ではない。(1,1)は(1,0)より好まれるが、(1,1)を含むどんな開集合をとってもその中には(1,0)より劣る（その点よりも(1,0)の方が好まれる）点が含まれる（(1,1)を含む開集合にはX財の消費量が1より少ない点が含まれる）ので連続性の条件が満たされない。これが連続でないことは直観的に次のようにも説明できる。(1,1)と $(1-x, 2)$ を比べる。 x がいくら小さくなくても正である限り(1,1)が好まれる。しかし $x = 0$ になると突然 $(1-x, 2) = (1, 2)$ の方が好まれるようになり、(1,1)と無差別になる点はない。したがって選好に飛びが生じる。この場合選好を効用関数で表現したときにも効用の値に飛びが生じ連続ではなくなる。

7 宇沢の定理

宇沢弘文は次の定理を証明した*7。

定理 3. ブラウワーの不動点定理と競争経済の均衡が存在するという定理は同値である。

証明. 前節でブラウワーの不動点定理を用いて競争経済の均衡が存在することを証明したので、その逆を証明すればよい。つまり、競争経済の均衡の存在がブラウワーの不動点定理を意味することを証明する。

Δ から Δ' への適当な連続関数を $\psi = \{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$ として以下のように各財の超過需要関数を作る。 $p = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ である。

$$z_i(p) = \psi_i(p) - p_i \mu(p), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

$\mu(p)$ は

$$\mu(p) = \frac{\sum_{i=0}^n p_i \psi_i(p)}{\sum_{i=0}^n p_i^2}$$

と定義される。各 z_i は連続であり、以下に示すようにワルラスの法則を満たす。(2) にそれぞれ p_i をかけて 0 から n まで加えると

*7 “Walras’s Existence Theorem and Brouwer’s Fixed Point Theorem”, 季刊理論経済学, pp. 59-62, 1962.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n p_i z_i &= \sum_{i=0}^n p_i \psi_i(p) - \mu(p) \sum_{i=0}^n p_i^2 = \sum_{i=0}^n p_i \psi_i(p) - \frac{\sum_{i=0}^n p_i \psi_i(p)}{\sum_{i=0}^n p_i^2} \sum_{i=0}^n p_i^2 \\ &= \sum_{i=0}^n p_i \psi_i(p) - \sum_{i=0}^n p_i \psi_i(p) = 0\end{aligned}$$

となる。以上によって z_i は超過需要関数の条件を満たすので均衡価格ベクトルが存在する*8。それを $p^* = \{p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*\}$ とする。すると

$$\psi_i(p^*) \leq \mu(p^*) p_i^* \quad (z_i(p^*) \leq 0)$$

であり、 $p_i^* \neq 0$ に対しては $\psi_i(p^*) = \mu(p^*) p_i^*$ が成り立つ。しかし、 $\psi_i(p^*)$ は定義上 (Δ から Δ' への関数) 負にはならないので $p_i^* = 0$ ならば $\psi_i(p^*) = 0$ であるからすべての i について $\psi_i(p^*) = \mu(p^*) p_i^*$ である。したがってこの式を 0 から n まで加えると

$$\sum_{i=0}^n \psi_i(p^*) = \mu(p^*) \sum_{i=0}^n p_i^*$$

が得られ、 $\sum_{i=0}^n \psi_i(p^*) = \sum_{i=0}^n p_i^* = 1$ であるから $\mu(p^*) = 1$ を得る。以上によって

$$\psi_i(p^*) = p_i^*$$

でなければならないから p^* は ψ の不動点である。これで Δ から Δ' への任意の連続関数に不動点が存在することが証明された。□

ところで、 p_i の和も ψ_i の和も 1 に等しいので $n+1$ 番目の財については

$$p_n = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i, \quad \psi_n(p) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(p), \quad z_n(p) = \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(p)\right) - \mu(p) \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i\right) \quad (3)$$

であり、

$$\mu(p) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} p_i \psi_i(p) + \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i\right) \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(p)\right)}{\sum_{i=0}^{n-1} p_i^2 + \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i\right)^2} \quad (4)$$

である。 $p_n z_n$ を求めると

$$p_n z_n = \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i\right) \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(p)\right) - \mu(p) \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i\right)^2 \quad (5)$$

*8 超過需要関数は連続でワルラスの法則を満たせばよい。価格の減少関数でなくてもよい。価格はもともと和が1になるように表されている (正規化されている) が、そうでなければ

$$\bar{p}_i = \frac{p_i}{\sum_{i=0}^n p_i}$$

とし、 ψ_i を $\bar{p} = \{\bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n\}$ の関数と考えれば 0 次同次性も成り立つ。 μ も \bar{p}_i で表せばよい。

となる。一方 (2) にそれぞれ p_i をかけて 0 から $n-1$ まで加えると

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_i z_i = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \psi_i(p) - \mu(p) \sum_{i=0}^{n-1} p_i^2 \quad (6)$$

が得られる。(5), (6) より

$$\sum_{i=0}^n p_i z_i = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \psi_i(p) + \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i\right) \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(p)\right) - \mu(p) \left[\sum_{i=0}^{n-1} p_i^2 + \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i\right)^2 \right]$$

となるが, (4) より $\sum_{i=0}^n p_i z_i = 0$ が導かれるので (3) を考慮してもワルラスの法則が成り立つ。

8 企業の生産を含む経済の均衡について

財が $n+1$ 個, 生産要素が $m+1$ 個あるものとする。それぞれの価格を $p_i, i=0, 1, \dots, n, q_j, j=0, 1, \dots, m$ で表す。消費者, 企業の数も 2 以上である。企業は消費者から提供された生産要素を用いて財を生産しそれらを販売して利潤を得る。消費者は企業に生産要素を提供して得た報酬で財を消費する。また消費者は企業の株主 (所有者) でもある。まず企業 l の利潤は次のように表される。

$$\pi_l = p_0 \tilde{y}_0^l + p_1 \tilde{y}_1^l + \dots + p_n \tilde{y}_n^l - q_0 \tilde{x}_0^l - q_1 \tilde{x}_1^l - \dots - q_m \tilde{x}_m^l$$

\tilde{y}_i^l と \tilde{x}_j^l はそれぞれ企業 l による i 財の産出量および生産要素 j の投入量である。各企業は自らの生産能力 (生産関数で表される) のもとで (価格を与えられたものとして) この利潤を最大化するように各財の産出量および各生産要素の投入量を決める (生産要素の投入量を決めれば財の産出量は生産関数によって決まる)。各企業による各生産要素の投入量および各財の産出量は財と生産要素の価格について連続であると仮定する (投入量, 産出量は価格の変化によって少しずつ変化する)。

消費者 k が企業 l の所有権を s_k^l の割合で持っているものとする ($0 \leq s_k^l \leq 1$) と, 消費者 k の予算制約式は次のように表される。

$$p_0 x_0^k + p_1 x_1^k + \dots + p_n x_n^k = q_0 y_0^k + q_1 y_1^k + \dots + q_m y_m^k + \sum_l s_k^l \pi_l$$

x_i^k は i 財の消費量 (需要), y_j^k は生産要素 j の供給量であり, $\sum_l s_k^l \pi_l$ はこの消費者が保有する企業の割合に応じて受け取る利潤の合計である。各消費者はこの予算制約のもとで効用を最大化するように財の需要と生産要素の供給を決める (価格と企業の利潤を与えられたものとして)。その需要, 供給は財と生産要素の価格について連続であると仮定する。たとえば生産要素の価格が上がれば所得が増えるので財の消費量も増えるであろう (下級財ならば減るかもしれない)。その変化が連続的であると仮定するのである。この式に企業の利潤を代入すると

$$p_0 x_0^k + p_1 x_1^k + \cdots + p_n x_n^k = q_0 y_0^k + q_1 y_1^k + \cdots + q_m y_m^k \\ + \sum_l s_k^l (p_0 \tilde{y}_0^l + p_1 \tilde{y}_1^l + \cdots + p_n \tilde{y}_n^l - q_0 \tilde{x}_0^l - q_1 \tilde{x}_1^l - \cdots - q_m \tilde{x}_m^l)$$

が得られる。 $\sum_k s_k^l = 1$ である (すべての消費者の各企業の所有割合の合計は 1 に等しい) から、この式をすべての消費者について合計すると

$$p_0 \sum_k x_0^k + p_1 \sum_k x_1^k + \cdots + p_n \sum_k x_n^k = q_0 \sum_k y_0^k + q_1 \sum_k y_1^k + \cdots + q_m \sum_k y_m^k \\ + \sum_l (p_0 \tilde{y}_0^l + p_1 \tilde{y}_1^l + \cdots + p_n \tilde{y}_n^l - q_0 \tilde{x}_0^l - q_1 \tilde{x}_1^l - \cdots - q_m \tilde{x}_m^l)$$

となる。 i 財の需要, 供給の合計 $\sum_k x_i^k$ および $\sum_l \tilde{y}_i^l$ をそれぞれ X_i, \tilde{Y}_i で, 生産要素 j の (消費者による) 供給の合計 $\sum_k y_j^k$, (企業による) 投入量の合計 $\sum_l \tilde{x}_j^l$ をそれぞれ Y_j, \tilde{X}_j で表す上上の式は

$$p_0(X_0 - \tilde{Y}_0) + p_1(X_1 - \tilde{Y}_1) + \cdots + p_n(X_n - \tilde{Y}_n) \\ + q_0(\tilde{X}_0 - Y_0) + q_1(\tilde{X}_1 - Y_1) + \cdots + q_m(\tilde{X}_m - Y_m) = 0$$

と書き直される。この式は各財, 各生産要素の超過需要と価格の積の合計がゼロに等しいことを表しており, 企業による生産を含む経済におけるワルラスの法則を表す。財と生産要素の需要, 供給が価格について連続であることから, 生産要素の番号をあらためて $n+1$ から $n+m+2$ まで, 価格を $p_j, j = n+1, n+2, \dots, n+m+2$ と表すと財が $n+m+2$ 個存在する交換経済の場合とまったく同じ手順で (ブラウワーの不動点定理を用いて) 均衡の存在が証明される。

■参考：供給の連続性-簡単なケース 企業が完全競争において 1 つの財をある費用関数のもとで生産しているとすると, 価格と限界費用が等しくなるような産出量を選ぶ。したがって限界費用関数が連続であり, かつ価格が変化しても生産をやめなければ企業の供給は連続である。

9 ナッシュ均衡 (Nash equilibrium) について

これまでの議論を応用して戦略型ゲームにおけるナッシュ均衡について考えてみたい。ナッシュ均衡の存在は多価関数 (対応) についての角谷の不動点定理を用いて証明されることが多いが, ナッシュ自身がブラウワーの不動点定理による証明を発表している。

各プレイヤーが m 個の戦略の選択肢を持つ n 人戦略型ゲームを考える。 n, m は 2 以上有限の整数である。プレイヤー i の戦略の集合を S_i で, 各戦略を s_{ij} で表す。混合戦略は S_i 上の確率分布として定義され p_i で表される。プレイヤー i が戦略 s_{ij} を選ぶ確率を p_{ij} とすると, すべての i について $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$ が成り立たなければならない。各プレイヤーの混合戦略の組をプロフィールと呼び \mathbf{p} で表す。プロフィール \mathbf{p} におけるプレイヤー i の期待利得を $\pi_i(\mathbf{p})$ で, そのプロフィールにおいて純粋戦略 s_{ij} を選んだときの利得を $\pi_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i})$ とする。 $\pi_i(\mathbf{p})$ は確率分布に関して連

続であるとする*9。 \mathbf{p}_{-i} はプロフィール \mathbf{p} における i 以外のプレイヤーの戦略の組である。 \mathbf{p}_{-i} に対するプレイヤー i の最適反応 (best response) の集合 \tilde{S}_i を次の条件を満たす純粋戦略および混合戦略の集合として定義する。

$$\tilde{S}_i = \{s_{ij} \mid \text{すべての } s'_{ij} \in S_i \text{ について } \pi_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}) \geq \pi_i(s'_{ij}, \mathbf{p}_{-i})\}$$

この条件を満たす純粋戦略のみに正の確率を割り当てる混合戦略も最適反応である。各プレイヤーは他のプレイヤーの戦略を与えられたものとして最適反応である戦略を選ぶ。各プレイヤーが互いに最適反応である戦略を選んでいる状態がナッシュ均衡 (Nash equilibrium) である。

ここで次の関数を定義する

$$\psi_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{p_{ij} + \max(\pi_i(s_{ij}, \mathbf{p}) - \pi_i(\mathbf{p}), 0)}{1 + \sum_{k=1}^m \max(\pi_i(s_{ik}, \mathbf{p}) - \pi_i(\mathbf{p}), 0)}$$

$\psi_i = (\psi_{i1}, \psi_{i2}, \dots, \psi_{im})$, $\psi(\mathbf{p}) = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ とする。各 ψ_i は成分の値が 0 から 1 までで成分の和が 1 であるような m 次元のベクトルであるから $m-1$ 次元の単体上の点である (単体の頂点は純粋戦略に対応する)。 ψ は n 個のベクトル ψ_i の組であるが ψ_i の成分を n 人分並べて ψ を表せば $n \times m$ 個の成分を持ったベクトルで表現される。独立な成分は $n(m-1)$ 個なので、可能な ψ 全体の集合は $n(m-1)$ 次元空間内の図形であるが、それは $m-1$ 次元単体の n 個の積であるから凸である。もちろんこの図形の大きさは有限である。 $n(m-1)$ 次元空間内の凸である図形は適当に拡大縮小すれば同じ次元の単体を含むようにできる。 ψ 全体の集合を表すこの図形と $n(m-1)$ 次元単体とを重心を合わせる形で、単体がこの図形に含まれるように配置し重心から外側へ向かって直線を引きそれが単体およびこの図形と交わる点を取り、重心からそれぞれの点までの距離に応じて単体の点をこの図形の点に対応させると連続的かつ 1 対 1 に対応する (「同相」であると言う)。すると $n(m-1)$ 次元単体 Δ からそれ自身への連続な関数をこの凸図形からそれ自身への連続な関数に移すことができる。 ψ はこの図形からそれ自身への連続な関数であるから、ブラウワーの不動点定理によって不動点を持つ*10。不動点の一つを $\tilde{\mathbf{p}}$, それを構成するベクトルを \tilde{p}_i , その成分を \tilde{p}_{ij} で表す。 $\tilde{\mathbf{p}}$ においてはすべての i, j について

$$\psi_{ij} = \tilde{p}_{ij}$$

が成り立つ。 ψ_{ij} の定義より

$$\frac{\tilde{p}_{ij} + \max(\pi_i(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}) - \pi_{ij}(\tilde{\mathbf{p}}), 0)}{1 + \sum_{k=1}^m \max(\pi_i(s_{ik}, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}) - \pi_i(\tilde{\mathbf{p}}), 0)} = \tilde{p}_{ij}$$

したがって

$$\max(\pi_i(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}) - \pi_i(\tilde{\mathbf{p}}), 0) = \tilde{p}_i \sum_{k=1}^m \max(\pi_i(s_{ik}, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}) - \pi_i(\tilde{\mathbf{p}}), 0)$$

*9 各プレイヤーの純粋戦略が有限個であり、その純粋戦略の組み合わせに対する各プレイヤーの利得が有限の値であれば期待利得は確率についての線形関数になるので連続である。

*10 単体と同相な集合上の関数の不動点については最後の節を見ていただきたい。

が得られる。 $\lambda = \sum_{k=1}^m \max(\pi_i(s_{ik}, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}) - \pi_i(\tilde{\mathbf{p}}), 0)$ とすると

$$\max(\pi_i(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}) - \pi_i(\tilde{\mathbf{p}}), 0) = \lambda \tilde{p}_{ij}$$

となる。

$\pi_i(\tilde{\mathbf{p}}) = \sum_{\{j: \tilde{p}_{ij} > 0\}} \pi_i(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}_{-i})$ であるから「 $\tilde{p}_{ij} > 0$ であるような j のすべてについて $\max(\pi_i(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}) - \pi_i(\tilde{\mathbf{p}}), 0) = \pi_i(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}) - \pi_i(\tilde{\mathbf{p}}) > 0$ 」であってはならないので $\lambda = 0$ でなければならない。したがって

$$\max(\pi_i(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}) - \pi_i(\tilde{\mathbf{p}}), 0) = 0$$

を得る。よって $\tilde{\mathbf{p}}$ に正の確率で含まれる各プレイヤーの戦略はすべて最適反応である。各プレイヤーが互いに最適反応である戦略を選んでいるので、この状態はナッシュ均衡になっている。以上によってナッシュ均衡の存在が証明された。

10 付録 1：コンパクト集合とその性質

先に紹介したブラウワーの不動点定理の証明には少々ごまかしがある。厳密に説明するには面密な数学の世界に足を踏み入れなければならない。ここでは「コンパクト」という言葉の定義に続いて必要最小限の次の 3 つの定理の証明を紹介する。

- (1). a, b を $a < b$ であるような実数とするとき、閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである。
- (2). 有限個のコンパクト集合の直積集合はコンパクトである。
- (3). コンパクトな集合におけるすべての点列は収束する部分列を持つ。

(1) と (2) により n 次元ユークリッド空間の有界な閉集合がコンパクトであることが言える（厳密な議論は「おまけ」の定理 7 を参照）。

X をある集合、 A をその部分集合とする。 X の部分集合の組があり、 A のあらゆる点はその部分集合の少なくとも一つに属しているとき、その部分集合の組が A を被覆すると言う。特にその部分集合がすべて開集合（境界を含まない集合）である場合、部分集合の組を開被覆と呼ぶ。

U と V がある集合 X の開被覆であるとき、 V に含まれる集合がすべて U に含まれているならば、 V は U の部分被覆であると言う。ここで「コンパクト集合」を定義する。

定義 1 (コンパクト集合). 集合 X のすべての開被覆が有限個の集合からなる部分被覆（有限部分被覆）を持つとき X はコンパクト集合である。

「有限個の集合からなる部分被覆」とは有限個の開集合の組で X を被覆することを意味する。この定義は無限個の開集合で X を被ったつもりでも実は有限個の開集合で被われている、あるいは同じことであるが、無限個の集合の組でなければ X を被えないような開被覆はないということの意味している。

次に1次元ユークリッド空間における閉じた区間のコンパクト性について考えるが、その前に実数の性質を見ておこう。

【注】 ユークリッド空間とはわれわれが認識できる普通の空間（集合）であり、1次元ユークリッド空間は直線で、2次元ユークリッド空間は平面で表され、3次元ユークリッド空間はわれわれが住むこの空間を意味する。4次元以上はイメージできないが同じようにして定義する。 n 次元ユークリッド空間内の点は n 個の成分からなるベクトルで表現される。次元の数は有限であるとする。

定義 2 (実数の集合の上界・下界). D を実数の集合（すなわち実数全体の集合 \mathbb{R} の部分集合）とする。ある実数 u がすべての $x \in D$ に対して $x \leq u$ を満たすとき D の上界と呼ぶ。そのような上界が存在する場合、 D は上に有界であると言う。また、ある実数 l がすべての $x \in D$ に対して $x \geq l$ を満たすとき D の下界と呼ぶ。そのような下界が存在する場合、 D は下に有界であると言う。

u, l は一つだけではなく条件を満たす実数がすべて上界、下界である。

定義 3 (実数の集合の上限・下限). D を上に有界な実数の集合とする。ある実数 s が D の上界であって、かつすべての D の上界 u に対して $s \leq u$ を満たすとき、 D の上限と呼び、 $\sup D$ と表す。上限は最小の上界である。

D を下に有界な実数の集合とする。ある実数 t が D の下界であって、かつすべての D の下界 l に対して $t \geq l$ を満たすとき、 D の下限と呼び、 $\inf D$ と表す。下限は最大の下界である。

上限、下限自身が D に属するとは限らない。もし上限が D に属せばそれは D の最大値であり、下限が D に属せばそれは D の最小値である。逆に上限が D に属さないときには D に最大値は存在せず、下限が D に属さないときには D に最小値は存在しない。

ここで次の公理を提示する。

上限の公理 上に有界で空集合ではない実数の集合には上限が存在する。

下限の公理 下に有界で空集合ではない実数の集合には下限が存在する。

これらは公理であるから成り立つものとして話を進めて行けばよいのだが、次の公理から導くこともできる。

デデキントの連続性公理 D, E が実数 (\mathbb{R}) の部分集合で

(1). $\mathbb{R} = D \cup E, D \cap E = \emptyset, D \neq \emptyset, E \neq \emptyset$ (\emptyset は空集合である)

(2). $x \in D, y \in E$ ならば $x < y$ である

を満たすならば、 D が最大値を持つか、 E が最小値を持つか、いずれかただ一つが成り立つ。このような実数の分け方を切断と呼ぶ。

これは実数を二つの部分に分けたとき、その切れ目も実数であってどちらかの部分に属しているということであり、実数の集合がつながっているということの意味するものである

【注】 有理数の集合はつながっていない。たとえば $\sqrt{2}$ より小さくない有理数と大きくない有理数に分けると $\sqrt{2}$ 自身は有理数ではなくどちらの組にも含まれないので、それぞれの組に最大値あるいは最小値はない。

この公理から上の二つの公理が導かれることを確認しておこう。

実数の集合 S が上に有界であると仮定する。このとき実数全体 \mathbb{R} を次の二つの組に分ける。

$$A = \{S \text{ の上界でない数の全体} \}, B = \{S \text{ の上界の全体} \}$$

これら以外に S に属する実数はなく、 A に属する数は B に属する数より小さいのでこの分け方は実数の切断になっている。したがって連続性公理によって A に最大値があるか B に最小値がある。 A に最大値があると仮定してその最大値を α とすると、それは S の上界ではないから S に $\alpha < s$ となるような s がある。そこで $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + s)$ とおけば $\alpha < \beta < s$ であるから β は S の上界ではない。したがって β は A に属さなければならないがこれは α が A の最大値であることと矛盾する。よって B に最小値が存在し、それが上限となる。

下限についても同様にして証明できる。実数の集合 S が下に有界であると仮定し、実数全体 \mathbb{R} を次の二つの組に分ける。

$$A = \{S \text{ の下界でない数の全体} \}, B = \{S \text{ の下界の全体} \}$$

これら以外に S に属する実数はなく、 A に属する数は B に属する数より大きいのでこの分け方は実数の切断になっている。したがって連続性公理によって A に最小値があるか B に最大値がある。 A に最小値があると仮定してその最小値を α とすると、それは S の下界ではないから S に $s < \alpha$ となるような s がある。そこで $\beta = \frac{1}{2}(s + \alpha)$ とおけば $s < \beta < \alpha$ であるから β は S の下界ではない。したがって β は A に属さなければならないがこれは α が A の最小値であることと矛盾する。よって B に最大値が存在し、それが下限となる。

以上の準備をもとに次の定理を証明する。

定理 4 (ハイネ・ボレルの定理). a, b を $a < b$ であるような実数とするとき、閉区間 $[a, b]$ はコンパクトである。

証明. U を $[a, b]$ の各点がある中の少なくとも一つの開集合に含まれているような \mathbb{R} の開集合の組であるとする。以下では $[a, b]$ が有限個のそのような開集合で被覆されることを示す。

S を $[a, \lambda]$ が U に属する有限個の開集合で被覆されるような区間となる $\lambda \in [a, b]$ の集合とし、 $s = \sup S$ とする。 s は U のある集合 W に属している ($s \in W$) ($\lambda \leq b$ より、 b は S の上界で $s \leq b$ であるから)。 W は \mathbb{R} の開集合であるから $(s - \delta, s + \delta) \subset W$ を満たす $\delta > 0$ が存在する。

【注】 ユークリッド空間における開集合は、それに含まれるすべての点の周囲にその集合に含まれる (小さな、しかし 0 ではない大きさを持つ) 集合をとれるような集合として定義され

る。集合の境界が含まれるとこの条件が成り立たないので開集合は境界を含まない。また境界上の点に限りなく近づいて行く点列など、開集合内の点列の極限がその開集合に含まれないこともある。一方閉集合は開集合の補集合として定義されるが、境界を含むとともに点列の極限はすべてその集合に含まれる。

さらに $s - \delta$ は S の上限ではないから $\tau > s - \delta$ を満たす $\tau \in S$ が存在する。したがって S の定義により、 $[a, \tau]$ は U に属する有限個の開集合の組 V_1, V_2, \dots, V_r によって被覆される。

$t \in [a, b]$ を $\tau \leq t < s + \delta$ を満たすようにとる。すると

$$[a, t] \subset [a, \tau] \cup (s - \delta, s + \delta) \subset V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r \cup W$$

が成り立つから、 $[a, t]$ は有限個の開集合で被覆され $t \in S$ である。特に $s \in S$ であり、さらに $s = b$ である。なぜならばそうでなければ s は S の上界とはならない ($s < b$ であれば、 $(s - \delta, s + \delta) \subset W$ であるから $s - \delta < t < s + \delta$ を満たす t が S に属する。しかし、 δ を十分に小さくにとって) たとえば $t = s + \frac{1}{2}\delta \leq b$ とすると $t > s$ となり s が S の上界とはならない。したがって $b \in S$ であり $[a, b]$ は U に属する有限個の間集合の組によって被覆される。□

このように閉区間はコンパクトであるが、开区間はコンパクトではない。开区間 $(-1, 1)$ を考えてみよう。开区間の組 $(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}) (n = 2, 3, \dots)$ をとると $(-1, 1)$ はこの开区間の無限個の組によって被覆される ($(-1, 1)$ に属するいかなる点もいずれかの $(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ に属する)。しかし、どのように有限個の $(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ をとっても $(-1, 1)$ を被覆することはできず、 $(-1, 1)$ はコンパクトではない。

定理 5 において有限個のコンパクト集合の直積集合がコンパクトであることを示すが、そのためにいくつかの補題を必要とする。

【注】 2つの集合 X, Y の直積集合 $(X \times Y)$ とは X, Y から 1 つずつ要素を選んで組にしたものを要素とする集合であり、3 つ以上の集合の直積集合も同様である。2次元ユークリッド空間は 2 つの 1次元ユークリッド空間の直積集合であり、 $n (\geq 3)$ 次元のユークリッド空間は n 個の 1次元ユークリッド空間の直積集合である。

補題 5. f を集合 X から Y への連続関数、 A を X のコンパクトな部分集合とする。

【注】 Y の任意の開集合を V としたとき $f^{-1}(V)$ が X の開集合であるならば f は連続である。この定義は通常連続性の定義と同じであるが詳細は付録 2 を参照。 $f^{-1}(V)$ は (f による) V の逆像と呼ばれ、

$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$$

と定義されるが、 V のすべての点についてそれに対応する $f^{-1}(V)$ の点があるわけではなく、 f によって V に含まれる点に対応する X の点の集合が $f^{-1}(V)$ である。

[注] V が Y の開集合 (あるいは Y における開集合) であるとは、 V の点の周囲に V に含まれる小さな開集合をとれるということであるが、それがとれないのはどう頑張っても小さな開集合が Y の範囲内で V からみ出してしまう場合である。 Y の開集合であっても Y を含むより大きな集合の開集合であるとは限らない。たとえば周囲を含まない 2 次元の円盤 (厚さのない円盤) は 2 次元の平面においては開集合であるが、3 次元空間においては開集合ではない (閉集合でもない)。なぜならば 3 次元空間内でその円盤に含まれるある点の周囲に小さな開集合をとれば必ず円盤から (イメージとしては上下に) はみ出してしまう。しかし 2 次元平面においてははみ出さない。

そのとき $f(A)$ は Y のコンパクトな部分集合である ($f(A)$ は関数 f によって A の点から移される点全体の集合)。

証明. \mathcal{V} を $f(A)$ を被覆する Y の開集合の組であるとすると、 A は $V \in \mathcal{V}$ に対する $f^{-1}(V)$ という形の開集合全体によって被覆される。つまりそのような $f^{-1}(V)$ の組は A の開被覆である。 A はコンパクトであるから有限部分被覆、すなわち \mathcal{V} に属する有限個の集合 V_1, V_2, \dots, V_k で次の条件を満たすものがある。

$$A \subset f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) \cup \dots \cup f^{-1}(V_k)$$

そうすると $f(A) \subset V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ が成り立ち $f(A)$ はコンパクトである □

補題 6. X, Y をある集合、 K を Y のコンパクトな部分集合、 U を $X \times Y$ (X と Y の直積集合) の開集合とする*11。 $V = \{x \in X : \{x\} \times K \subset U\}$ とすると V は X の開集合である。

証明. $x \in V$ とする。 U が開集合であるから、各 $y \in K$ について $(x, y) \in D_y \times E_y, D_y \times E_y \subset U$ を満たす X, Y の開集合 D_y, E_y が存在する。 K はコンパクトなので $K \subset E_{y_1} \cup E_{y_2} \cup \dots \cup E_{y_k}$ となるような有限個の y の集合 y_1, y_2, \dots, y_k がある。 $N_x = D_{y_1} \cap D_{y_2} \cap \dots \cap D_{y_k}$ とすると N_x は X の開集合であり、さらに

$$N_x \times K \subset \bigcup_{i=1}^k (N_x \times E_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^k (D_{y_i} \times E_{y_i}) \subset U$$

となるから $N_x \subset V$ が得られる ($N_x \times K \subset U$ であるから、すべての $x \in N_x$ について $x \in V$ である)。各 $x \in V$ は N_x に含まれ、その N_x は V に含まれるから V は N_x 全体の和集合に一致する。したがって V は X の開集合である。 □

定理 5. 有限個のコンパクト集合の直積集合はコンパクトである。

証明. 二つのコンパクトな集合 X, Y の積がコンパクトであることを示せば、一般的な結論は帰納的に導かれる ($X \times Y$ がコンパクトならそれと Z の積 $X \times Y \times Z$ もコンパクトである。以下同様)。 U を $X \times Y$ の開被覆とする。これが有限個の部分被覆を持つことを示さなければならない。

*11 直積集合における開集合については付録 3 を参照。

x を X の点とすると、 $\{x\} \times Y$ はコンパクト集合 Y から $X \times Y$ への連続関数 ($y \in Y$ を (x, y) へ移す関数) による像であり、コンパクト集合の連続関数による像 (関数によって移された点の集合) はコンパクトであるから (補題 5), $X \times Y$ のコンパクトな部分集合である。したがって、開被覆 \mathcal{U} に属する有限個の開集合の組 U_1, U_2, \dots, U_r で $\{x\} \times Y$ が $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r$ に含まれるようなものがある。 X の点 x' について $\{x'\} \times Y$ が $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r$ に含まれるようなすべての点の集合を V_x とすると、 $x \in V_x$ であり補題 6 によって V_x は開集合である。そのとき $V_x \times Y$ も \mathcal{U} に属する有限個の開集合 $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r$ によって被覆される。

すべての $x \in X$ についての V_x の組 $\{V_x : x \in X\}$ は X の開被覆である (x によって V_x は異なるかもしれない)。 X はコンパクトであるから、 $X = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_r}$ となるような有限個の点の組 $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ がある (各 V_x は X に含まれているから $V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \dots \cup V_{x_r}$ と X が一致する)。 $X \times Y$ は $j = 1, 2, \dots, r$ についての $V_{x_j} \times Y$ の和集合であり、各々の集合は \mathcal{U} に属する有限個の開集合の組によって被覆されている。したがって全体として $X \times Y$ は \mathcal{U} に属する有限個の開集合の組によって被覆されるからコンパクトである。 \square

定理 6. コンパクトな集合におけるすべての点列は収束する部分列を持つ (部分列とは (無限個の) 点列から (無限個のものを) 順序を変えず選んで並べたものである)。

証明. X をコンパクトな集合、 x_1, x_2, x_3, \dots をその点列とする。また F_n で集合 $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ の閉包を表す。

【注】 $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ の閉包とは $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ に含まれるすべての点を含む閉集合の共通部分あるいは最も小さい閉集合である。 $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ がある点に限りなく近づいて行くとすれば、その点も閉包に含まれる。

まず F_1, F_2, F_3, \dots の共通部分が空集合ではないことを示す。それが空集合であると仮定してみよう。 $V_n = X \setminus F_n$ すなわち各 F_n の補集合を V_n とすると、 X は集合 V_1, V_2, V_3, \dots の和集合に等しい。

【注】 たとえば V_1 と V_2 の和集合 $V_1 \cup V_2$ は F_1 と F_2 の両方には含まれない要素の集合 $X \setminus (F_1 \cap F_2)$ であるから、すべての V_n の和集合は F_1, F_2, F_3, \dots のすべてには含まれない要素の集合である。 F_1, F_2, F_3, \dots の共通部分が空集合であればそれらのすべてに含まれる要素はないので V_n の和集合は X に等しい。

各 V_n は開集合であるから V_1, V_2, V_3, \dots は X の開被覆となり、 X はコンパクトであるから有限個の V_n によって被覆される。一方 $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots$ であるから、ある n について $X = V_n$ となる。しかし F_n はあらゆる n について空集合ではないからこれは不可能である。したがって F_1, F_2, F_3, \dots の共通部分 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ は空集合ではなく、すべての F_n に属するような点 p が存在する。 $p \in F_n$ であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対して $d(x_j, p) < \varepsilon$ となるような点 $x_j (j \geq n)$ がある (p は $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ の閉包に属しているので、 $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$ と p との距離はいくらで

も小さくすることができる)*12。

【注】 n 次元ユークリッド空間における 2 点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ の間の距離は一般に

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

と定義される。

まず $\{x_1, x_2, \dots\}$ から $\varepsilon = 1$ に対して $d(x_{n_1}, p) < 1$ となるような点 x_{n_1} を一つ選ぶ ($n_1 \geq 1$, p は F_1 に属しているから可能である)。次に点列 $\{x_n; n > n_1\}$ から $d(x_{n_2}, p) < \frac{1}{2}$ を満たす点 x_{n_2} ($n_2 > n_1$) を選ぶ (p は F_{n_1+1} に属しているから可能である)。同様にして x_{n_3}, x_{n_4}, \dots と選んでいく。たとえば $x_{n_{j+1}}$ ($j \geq 1$) は点列 $\{x_n; n > n_j\}$ から $d(x_{n_{j+1}}, p) < \frac{1}{j+1}$ を満たすように選ばれる。すると点列 x_{n_1}, x_{n_2}, \dots は ($j \rightarrow \infty$ のとき) p に収束する。□

11 付録 2：関数の連続性

補題 7. 集合 X から集合 Y への関数 $y = f(x)$ の $x_0 \in X$ における連続性について以下の二つの定義は同値である。

- (1). x が x_0 に収束するとき、 $f(x)$ も $f(x_0)$ に収束する。
- (2). 2 点 x, y の間の距離を $d(x, y)$ のように表すと、どのような実数 $\varepsilon > 0$ に対しても $d(x_0, x') < \delta$ ならば $d(f(x_0), f(x')) < \varepsilon$ となるような実数 $\delta > 0$ が存在する。

証明. 関数 $y = f(x)$ が x_0 において (1) の意味で連続であるとする。このとき、ある ε について $d(x_0, x') < \delta$ ならば $d(f(x_0), f(x')) < \varepsilon$ となるような実数 $\delta > 0$ が存在しないと仮定する。するとどんな $\delta > 0$ についても

$$d(x_0, x) < \delta \text{ のとき } d(f(x_0), f(x)) \geq \varepsilon$$

であるような点 x が存在する。 δ によってこの x は異なるかもしれない。各自然数 n について $\delta = \frac{1}{n}$ としてこのような x を一つずつ選んで点列 x_1, x_2, \dots, x_n を作る (同じものが含まれていてもよい)。各 n について

$$d(x_0, x_n) < \frac{1}{n} \text{ のとき } d(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon$$

が成り立っている。 n を大きくしていくと $d(x_0, x_n)$ はゼロに収束していくが $d(f(x_0), f(x_n))$ はゼロに収束しない。したがって $f(x)$ が (1) の意味で x_0 において連続であるという仮定と矛盾するので、求める $\delta > 0$ が存在しなければならない。

*12 「おまけ」の補題 28 を参照。なお、この定理は後で説明する距離空間についてもこのままで成り立つ。

逆に関数 $y = f(x)$ が x_0 において (2) の意味で連続であるとする。 X の点列 x_1, x_2, \dots, x_n で n が大きくなる時 x_0 に収束するものを一つとり、それに対応した Y の点列 $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ が $f(x_0)$ に収束しないと仮定する。するとある $\varepsilon > 0$ についてどんなに大きな番号 N についても

$$n \geq N \text{ のとき } d(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon$$

が成り立つような n が存在する。 $f(x)$ は (2) の意味で連続であると仮定したからこの ε について適当に $\delta > 0$ を選べば

$$d(x_0, x_n) < \delta \text{ ならば } d(f(x_0), f(x_n)) < \varepsilon$$

が成り立つはずである。一方点列 x_1, x_2, \dots, x_n は x_0 に収束するから十分に大きな N について

$$n \geq N \text{ ならば } d(x_0, x_n) < \delta$$

となる。どんなに大きな N についても $n \geq N$ のとき $d(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon$ となる n があるからそのような n について

$$d(x_0, x_n) < \delta \text{ のとき } d(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon$$

であることになり、これは (2) の連続性の定義と矛盾する。したがって $f(x)$ は (1) の意味でも連続である。 \square

集合 X から Y への関数 $f(x)$ が X のすべての点において連続ならば X において連続である。次の補題の証明において X のある点 x から δ 以内の距離にある点からなる開集合（開球）を $B_X(x, \delta)$ のように表す。この記号を用いると補題 7 の (2) の定義は次のように表現される。

どのような実数 $\varepsilon > 0$ に対しても $x' \in B_X(x_0, \delta)$ ならば $f(x') \in B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ となるような実数 $\delta > 0$ が存在する。

補題 8. f を集合 X から集合 Y への関数とする。あらゆる Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が X の開集合であるとき、またそのときにのみ f は X において（補題 7 の意味で）連続である。

証明. f が連続であると仮定しよう。 V を Y の開集合とし、 $x \in f^{-1}(V)$ であるとする。 $f^{-1}(V)$ が開集合であることを示すには、 $B_X(x, \delta) \subset f^{-1}(V)$ となる δ が存在することを示さなければならない。 $f(x)$ が V に属し、 V は開集合であるから $B_Y(f(x), \varepsilon) \subset V$ を満たすような ε が存在する。 f は連続であるから $x' \in B_X(x, \delta)$ ならば $f(x') \in B_Y(f(x), \varepsilon)$ となるような δ がある。したがって $x' \in B_X(x, \delta)$ であるようなどんな x' についても $f(x') \in V$ 、すなわち $x' \in f^{-1}(V)$ である。以上によって f が連続ならば、あらゆる Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが示された。

逆に、あらゆる Y の開集合 V に対して $f^{-1}(V)$ が X の開集合であると仮定しよう。 x を X の任意の点とし、ある与えられた ε をとる。開球 $B_Y(f(x), \varepsilon)$ は Y において開集合であるから、その逆像 $f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon))$ は X において開集合であり、かつ x を含んでいる。したがって $B_X(x, \delta) \subset$

$f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon))$ が満たされるような δ が存在する。これは $f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon)$ を意味する。以上によって与えられた ε に対して $x \in B_X(x, \delta)$ ならば $f(x) \in B_Y(f(x), \varepsilon)$ となるような実数 δ が存在することが示されたから f は連続である。□

開集合を用いた連続性の定義を閉集合で置き換えることもできる。

補題 9. f を集合 X から集合 Y への関数とする。あらゆる Y の閉集合 G に対して $f^{-1}(G)$ が X の閉集合であるとき、またそのときのみ f は X において連続である。

証明. Y の集合 G に対して $X \setminus f^{-1}(G) = f^{-1}(Y \setminus G)$ である。すなわち $f^{-1}(G)$ に含まれない X の点は G に含まれない Y の点に対応する。 f が連続ならば、開集合を用いた連続性の定義により $Y \setminus G$ が開集合のとき $f^{-1}(Y \setminus G)$ も開集合である。開集合の補集合が閉集合であり、閉集合の補集合は開集合あるから G が閉集合なら $f^{-1}(G)$ も閉集合となる。

逆に G が閉集合のとき $f^{-1}(G)$ も閉集合であるとする、 $Y \setminus G$ が開集合のとき $f^{-1}(Y \setminus G)$ が開集合となるから f は連続である。□

補題 10. X, Y, Z を集合, $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ をそれぞれ X から Y, Y から Z への連続関数であるとする。そのとき X から Z への f と g の合成関数 $g \circ f: X \rightarrow Z$ は連続である。

証明. V を Z の開集合とすると g は連続であるから $g^{-1}(V)$ は開集合であり、さらに f が連続であるから $f^{-1}(g^{-1}(V))$ も開集合である。ここで $f^{-1}(g^{-1}(V))$ は g によって $V \subset Z$ の点に移されるような Y の点に移される X の点の集合であるから、合成関数 $g \circ f$ によって V の点に移される X の点の集合 $(g \circ f)^{-1}(V)$ であり、それが開集合であるから $(g \circ f)$ は連続である。□

12 付録 3：直積集合における開集合

補題 11. (1) X, Y をそれぞれ n 次元, m 次元ユークリッド空間の部分集合とする。次の条件が成り立つとき、またそのときのみ $X \times Y$ の部分集合 U は $X \times Y$ において開集合である。

U の任意の点 (v, w) に対して

$$\{(x, y) \in X \times Y : d(x, v) < \delta_1, d(y, w) < \delta_2\} \subset U \quad (7)$$

を満たす $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ が存在する。

(2) X, Y を (1) と同じ意味とする。 $X \times Y$ の部分集合 U は次の条件が満たされるとき、またそのときのみ $X \times Y$ の開集合である。

U の任意の点 (v, w) に対して $v \in V, w \in W$ かつ $V \times W \subset U$ を満たすような X の開集合 V と Y の開集合 W が存在する。

証明. (1) 開集合の定義により $X \times Y$ の部分集合 U は, U の任意の点 (v, w) について

$$\{(x, y) \in X \times Y : d((x, y)(v, w)) < \delta\} \subset U \quad (8)$$

が成り立つような δ が存在するとき $X \times Y$ の開集合である。

【注】 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ とすると

$$d(x, v) = \sqrt{(x_1 - v_1)^2 + (x_2 - v_2)^2 + \dots + (x_n - v_n)^2}$$

$$d(y, w) = \sqrt{(y_1 - w_1)^2 + (y_2 - w_2)^2 + \dots + (y_m - w_m)^2}$$

$(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$, $(v, w) = (v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m)$ であり

$$\begin{aligned} d((x, y)(v, w)) \\ = \sqrt{(x_1 - v_1)^2 + (x_2 - v_2)^2 + \dots + (x_n - v_n)^2 + (y_1 - w_1)^2 + (y_2 - w_2)^2 + \dots + (y_m - w_m)^2} \end{aligned}$$

である。

U のある点を (v, w) として, (8) が成り立つような δ が存在すると仮定する。 $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta$ とおくと $\delta_1^2 + \delta_2^2 = \delta^2$ である。したがって $d(x, v) < \delta_1$, $d(y, w) < \delta_2$ であれば $d((x, y)(v, w)) < \delta$ が成り立つ。ゆえに $(x, y) \in U$ であり, (7) が成り立つ。

逆に次の式が成り立つような δ_1, δ_2 が存在すると仮定する。

$$\{(x, y) \in X \times Y : d(x, v) < \delta_1, d(y, w) < \delta_2\} \subset U$$

δ_1, δ_2 の内小さい方を δ とおく。 $d((x, y)(v, w)) < \delta$ であれば $d(x, v) < \delta_1$ かつ $d(y, w) < \delta_2$ であり, $(x, y) \in U$ であるから, (8) が成り立つ。

(2) U を $X \times Y$ の開集合とする。そのときこの補題の (1) により次の式を満たすような $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ が存在する。

$$\{(x, y) \in X \times Y : d(x, v) < \delta_1, d(y, w) < \delta_2\} \subset U$$

ここで

$$V = \{x \in X : d(x, v) < \delta_1\}, W = \{y \in Y : d(y, w) < \delta_2\}$$

とおくと, V は X の開集合, W は Y の開集合であり, $v \in V, w \in W, V \times W \subset U$ となる。

逆に U が $X \times Y$ の部分集合で U の任意の点 (v, w) について X, Y の開集合 V, W があって $v \in V, w \in W$ かつ $V \times W \subset U$ が成り立つと仮定する。すると (v, w) について

$$\{x : d(x, v) < \delta_1\} \subset V$$

および

$$\{y : d(y, w) < \delta_2\} \subset W$$

となるような $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ が存在する。そのとき

$$\{(x, y) \in X \times Y : d(x, v) < \delta_1, d(y, w) < \delta_2\} \subset V \times W \subset U$$

が成り立つ。したがってこの補題の (1) より U は $X \times Y$ の開集合である。

□

13 おまけ：ユークリッド空間の一般理論

議論の流れのためにこれまでの説明と重複する箇所もある。以下では「空間」と「集合」を同じ意味で用いる。

13.1 ユークリッド空間と距離

0次元ユークリッド空間はただ1点からなる空間、1次元ユークリッド空間は1本の直線からなる空間である。1次元ユークリッド空間において適当に原点と目盛りを決めると、直線上の各点の位置、すなわち座標を数字（実数）で表すことができ、いわゆる数直線と呼ばれるものになる。2次元ユークリッド空間は一つの平面であり、やはり適当に原点と原点で直交する二つの軸とその軸上の目盛りを決めれば、平面上の各点の座標を各軸からの距離を表す二つの数字の組で表現することができる。3次元ユークリッド空間はわれわれが住むこの空間であり、適当に原点と原点で直交する三つの軸とその軸上の目盛りを決めれば、空間内の各点の座標を二つの軸によって作られる平面からの距離を表す三つの数字の組で表現することができる。さらにわれわれがイメージすることはできないが4次元、5次元、... のユークリッド空間も4つ、5つ、... の数字の組によって表現されるものとして考えることができる。 n 次元ユークリッド空間を \mathbb{R}^n で表す（1次元ユークリッド空間は \mathbb{R} ）。

2次元ユークリッド空間（平面） \mathbb{R}^2 における2点を $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ としてその2点間の距離を次のように定義する。

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2}$$

この距離は平面上で2点を結ぶ線分の長さに等しい。同様にして3次元ユークリッド空間における2点を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ とするとその2点間の距離は

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2}$$

と表される。これも空間内における 2 点を結ぶ線分の長さに等しい。一般的に n 次元ユークリッド空間における 2 点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ と $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ の距離は次のように表される。

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

この距離をユークリッドの距離と呼ぶ。

n 次元ユークリッド空間の距離について次の関係が成り立つ。

- (1). すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq 0$ (距離は負ではない)
- (2). すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ (距離はどちら向きに測っても等しい)
- (3). すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ について $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}| \geq |\mathbf{x} - \mathbf{z}|$ (三角不等式)
- (4). $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 0$ のとき, またそのときにのみ $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (\mathbf{x} と \mathbf{y} が同一の点) である。

この内 (1), (2), (4) は明らかである。(3) は, 幾何学的には三角形の 2 辺の長さの和は残りの 1 辺の長さより大きいということの意味する (等しい場合 3 点は同一直線上にある)。以下のようにして確認できる。 λ に関する 2 次式

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i \lambda)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \lambda + \sum_{i=1}^n b_i^2 \lambda^2$$

を考える。これは負であってはならないから二次方程式の判別式により

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

を得る。この式は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2 \end{aligned}$$

を意味する。ここで $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i$ とおくと上式は

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}$$

となる。これは n 次元ユークリッド空間における 3 点 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}, \mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ について

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$$

であることを意味する。

定義 4 (ユークリッド空間の開集合). ユークリッド空間 X の部分集合 V が次の条件を満たすとき、開集合であると言う。

V のあらゆる点 $\mathbf{v} \in V$ について $\{\mathbf{x} \in X : |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta\} \subset V$ を満たす $\delta > 0$ が存在する。

空集合 (何も含まない集合) \emptyset も開集合であると考えよう。 X 自身も開集合である。開集合のいかなる和集合も開集合であり、また有限個の開集合の共通部分も開集合であることを示すことができる (これは後でより一般的な距離空間について証明する)。この定義が常識的な開集合のイメージと一致することを簡単な例で確認してみよう。1次元ユークリッド空間の开区間 $(0, 1)$ において (「开区間」とは区間の両端を含まない区間であり、1次元ユークリッド空間における開集合である)、0に近い点として $\mathbf{v} = \varepsilon$ をとると、どのような $\varepsilon > 0$ についても上の定義において $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ とおけば、 $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ であって $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \frac{1}{2}\varepsilon\} \subset (0, 1)$ が成り立つ。一方閉区間 $[0, 1]$ においては (「閉区間」とは区間の両端を含む区間であり、1次元ユークリッド空間における閉集合である。閉集合については後で説明する)、点0または1からわずかでも正の距離にある部分は半分がその区間からはみ出してしまうので開集合とはならない。

13.2 距離空間

ユークリッド空間を抽象化したものが距離空間である。

定義 5 (距離空間). 距離空間とは、ある集合 X についてその任意の要素 (あるいは点、要素とは集合を構成するもの) x, y について次の条件を満たす実数値関数 $d(x, y)$ が定義されたものであり、 d は距離 (または距離関数) と呼ばれる。距離を明示して距離空間を表す場合は (X, d) と書く。

- (1). すべての $x, y \in X$ について $d(x, y) \geq 0$ (2点間の距離は負ではない)。
- (2). すべての $x, y \in X$ について $d(x, y) = d(y, x)$ (距離はどちら向きに測っても等しい)。
- (3). すべての $x, y, z \in X$ について $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式) が成り立つ。
- (4). $x = y$ のとき、またそのときのみ $d(x, y) = 0$ である (2点間の距離がゼロのときはその2点は同一の点であり、また同一の点であれば距離はゼロである)。

n 次元ユークリッド空間はユークリッドの距離によって距離空間となる。またユークリッド空間の部分集合も同様にユークリッドの距離によって距離空間となる。たとえば1次元ユークリッド空間の部分集合としては座標 x が $-1 \leq x \leq 1$ を満たすような点の集合や、 $x > 0$ を満たす点の集合が考えられる、それ以外の次元についても同様である。

定義 6 (開球). (X, d) を距離空間とする。 X の点 x とある実数 $r > 0$ について次の式で定義される集合 $B_X(x, r)$ を、 X における x を中心とする半径 r の開球と言う。

$$B_X(x, r) = \{x' \in X : d(x', x) < r\}$$

これは x からの距離が r より小さい X に属する点の集合を表しており、3次元ユークリッド空間

ではまさに開球（表面を含まない球の内部）となる。

定義 7 (開集合). (X, d) を距離空間とする。 X の部分集合 V が次の条件を満たすとき開集合であると言う。

V のあらゆる点 $v \in V$ について $B_X(v, \delta) \subset V$ を満たす $\delta > 0$ が存在する。

この定義はユークリッド空間においては定義 4 を意味する。やはり空集合も開集合であるとする。

補題 12. X を距離空間, d をその距離関数, x_0 を X の点とする。そのとき, 任意の $r > 0$ について半径 r の開球 $B_X(x_0, r)$ は X の開集合である。

証明. $x \in B_X(x_0, r)$ とすると, ある $\delta > 0$ について $B_X(x, \delta) \subset B_X(x_0, r)$ となることを示せばよい。 $\delta = r - d(x, x_0)$ とすると $d(x, x_0) < r$ ($x \in B_X(x_0, r)$ より) であるから $\delta > 0$ である。 $x' \in B_X(x, \delta)$ とすると三角不等式により

$$d(x', x_0) \leq d(x', x) + d(x, x_0) < \delta + d(x, x_0) = r$$

となるから, $x' \in B_X(x_0, r)$ を得る。したがって $B_X(x, \delta) \subset B_X(x_0, r)$ となり ($B_X(x, \delta)$ に含まれる点は $B_X(x_0, r)$ に含まれる), $B_X(x_0, r)$ が開集合であることが示された。□

例 1. 集合の要素はユークリッド空間の点ばかりではない。ユークリッド空間における関数も集合の要素となりうる。関数の集合は関数空間と呼ばれる。たとえば閉区間 $[0, 1]$ から \mathbb{R} への連続な関数の集合を考えてみよう。 $y = f(x), y = g(x) (y \in \mathbb{R}, x \in [0, 1])$ を二つの関数とするとき

$$d(f, g) = \max_{[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

で定義される実数 ($[0, 1]$ における $f(x)$ と $g(x)$ との差の絶対値の最大値) はこの関数空間について距離の条件を満たしている。ここでは $[0, 1]$ の全体にわたって $f(x) = g(x)$ であるときに $f(x)$ と $g(x)$ が等しいものとし, $f(x) \equiv g(x)$ と表す。絶対値をとっているから明らかに $d(f, g) \geq 0$ が成り立つ。また, やはり絶対値をとっているから $[0, 1]$ の全体にわたって $f(x) = g(x)$ でなければ $d(f, g) = 0$ とはならないし, $f(x) \equiv g(x)$ であれば $d(f, g) = 0$ である。三つの関数 $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$ について

$$\begin{aligned} d(f, h) &= \max_{[0,1]} |f(x) - h(x)| = \max_{[0,1]} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq \max_{[0,1]} |f(x) - g(x)| + \max_{[0,1]} |g(x) - h(x)| = d(f, g) + d(g, h) \end{aligned}$$

より三角不等式が得られる。したがって $[0, 1]$ から \mathbb{R} への連続な関数の集合は上記の距離関数によって距離空間となる。

13.3 位相空間

距離空間をさらに抽象化したものが位相空間である。距離空間は距離によって定義されたが位相空間は開集合によって定義される。

定義 8 (位相空間). ある集合 X の部分集合 (開集合と呼ぶ) の組 (集まり) が次の条件を満たすとき X は位相空間である。

- (1). 空集合 \emptyset と X 自身はともに開集合である。
- (2). 開集合のあらゆる和集合は開集合である (無限個の場合も含む)。
- (3). 有限個の開集合の共通部分は開集合である (無限個の場合は含まない)。

ある位相空間のすべての開集合の組を位相と呼ぶ。ある位相空間の位相を明確に表す必要がある場合には、たとえば X の位相を τ として位相空間 X を (X, τ) のように表すが、特に混乱を招かない場合は単に X だけで表す。

まず距離空間が位相空間であることを示そう。

補題 13. X を距離空間とすると X の開集合の組は位相空間の条件を満たしている。

証明. (1). 定義によって空集合は開集合である。また X 全体については開集合の条件が満たされている (X に含まれない要素はないので X の点 x のあらゆる開球は当然 X に含まれる)。

(2). X の開集合のある組を \mathcal{A} とし、 U を \mathcal{A} に含まれるすべての開集合の和集合であるとする。 U が開集合であることを示そう。 $x \in U$ とすると x は \mathcal{A} に含まれるある開集合 V の要素である。したがって $B_X(x, \delta) \subset V$ となるような δ がある。一方 $V \subset U$ であるから $B_X(x, \delta) \subset U$ となるので U は開集合である。

(3). V_1, V_2, \dots, V_k を X に含まれる有限個の開集合の組、それらの共通部分を $V = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_k$ とする。 x をすべての j について $x \in V_j$ であるような (V_1, V_2, \dots, V_k のすべての集合の要素である) 点とすると、すべての j について $B_X(x, \delta_j) \subset V_j$ となるような実数 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ がある。 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ の内で最小のものを δ とすると、 k は有限で各 δ_j は正であるから $\delta > 0$ である。さらに x はすべての V_j に属しているの、すべての j について $B_X(x, \delta) \subset B_X(x, \delta_j) \subset V_j$ であるから、 $B_X(x, \delta) \subset V$ となり、 V は開集合である。

□

これにより距離空間はその距離によって定義される開集合の組を位相とする位相空間であることがわかる。ユークリッド空間は距離空間であったから、ユークリッドの距離によって定義される開集合の組を位相とする位相空間である。

位相空間の条件の内 (3) の有限個という制約は重要なものである。たとえば 1 次元ユークリッド空間において n を自然数として开区間 $(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ を考え、その $n = 1, 2, \dots$ の無限個の共通部分をとると、あらゆる n について $(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ に含まれる点の集合は閉区間 $[0, 1]$ となり開集合で

はない。

13.4 閉集合

定義 9 (閉集合). X を (ある位相を持った) 位相空間であるとする。 X の部分集合 F はその補集合 $X \setminus F$ (F に属さない X の要素の集合) が開集合であるとき, またそのときのみ閉集合であると言う。

空集合と X 自体はともに開集合であるが, 空集合の (X における) 補集合は X , X の補集合は空集合であるから, 空集合と X は開集合であるとともに閉集合でもある。

たとえば 1 次元ユークリッド空間の閉区間 (両端を含む区間) $F = [0, 1]$ の補集合は $\mathbb{R} \setminus F = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ ($-\infty, \infty$ はいくらでも小さい数, いくらでも大きい数を含んでいるということ) であるが, この集合のどんな点 \mathbf{v} においても $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : |\mathbf{x} - \mathbf{v}| < \delta\} \subset X \setminus F$ を満たす $\delta > 0$ をとることができるので開集合であり, したがって F は閉集合である。

開集合と閉集合は全体の集合に対して相対的なものである。たとえば数直線上 (1 次元ユークリッド空間) において $[-1, 1]$ (-1 と 1 を含む区間) は閉集合, $(-1, 1)$ (-1 も 1 も含まない区間) は開集合, $[-1, 1)$ (-1 は含まず, 1 は含む区間) は開集合でも閉集合でもないが, X として $[-2, 1]$ をとると $[-1, 1)$ は開集合となる (点 1 を中心とする半径 δ ($\delta < 3$) の開球は数直線全体においては 1 より大きい部分を含むが $[-2, 1]$ においては含まないから, その開球は $[-2, 1]$ に含まれている)。

集合の演算によって, X のいくつかの部分集合の和集合 (その部分集合のいずれかに含まれる要素の集合) は各部分集合の補集合の共通部分 (各部分集合のいずれにも含まれない要素の集合) の補集合に等しく, X のいくつかの部分集合の共通部分 (その部分集合のすべてに含まれる要素の集合) は各部分集合の補集合の和集合 (その部分集合のすべてには含まれない要素の集合) の補集合に等しい。したがって次の補題を得る。

補題 14. 位相空間にける閉集合は次の条件を満たす。

- (1). 空集合 \emptyset と X 自身はともに閉集合である。
- (2). 有限個の閉集合の和集合は閉集合である (無限個の場合は含まない)。
- (3). 有限個または無限個の閉集合の共通部分は閉集合である。

証明. (2) は「有限個の閉集合の和集合の補集合」は「有限個の開集合の共通部分」であることから導かれる。また (3) は「有限個または無限個の閉集合の共通部分の補集合」は「有限個または無限個の開集合の和集合」であることから導かれる。 \square

ここでも (2) の有限個の条件を確認してみよう。1 次元ユークリッド空間において n を自然数として閉区間 $[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ を考え, その $n = 3, 4, \dots$, の無限個の和集合をとると, 0 と 1 はどのような n についても $[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ には含まれないから, その和集合 (いずれかの n についてこの閉区間に含まれる点の集合) は开区間 $(0, 1)$ になり閉集合とはならない。

13.5 ハウスドルフ空間

定義 10 (ハウスドルフ空間). 位相空間 X が次の条件を満たすときハウスドルフ空間であると言う。

x と y を X の異なる点であるとする、 $x \in U$, $y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ (U と V とは共通部分を持たない) を満たす開集合 U と V が存在する。

補題 15. 距離空間はハウスドルフ空間である。

証明. 距離空間 X の距離を d で表し、 x と y を互いに異なる X の点であるとする。 $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$ とおくと x, y それぞれを中心とする開球 $B_X(x, \varepsilon)$ と $B_X(y, \varepsilon)$ は開集合である。もちろん x, y それぞれはこれらの開球に含まれている。もしこれらの共通部分 $B_X(x, \varepsilon) \cap B_X(y, \varepsilon)$ が空集合ではない (共通部分が存在する) とすると $d(x, z) < \varepsilon, d(y, z) < \varepsilon$ を満たす $z \in X$ がある (z は $B_X(x, \varepsilon)$ と $B_X(y, \varepsilon)$ の両方に含まれる点である)。しかしそうすると三角不等式によって $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 2\varepsilon$ となり $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$ と矛盾する。したがって $B_X(x, \varepsilon) \cap B_X(y, \varepsilon) = \emptyset$ であるから X はハウスドルフ空間である。 \square

これによりユークリッド空間もハウスドルフ空間である。

13.6 ユークリッド空間のコンパクト集合に関する一般的な議論

X を位相空間, τ をその位相, A を X の部分集合とする。 τ_A を各 $V \in \tau$ について $V \cap A$ であるような集合全体の組とすると τ_A は A の位相になる。これを A の相対位相 (あるいは部分空間位相) と言う。 $V \cap A$ であるような集合の有限個または無限個の和集合は τ に含まれる集合 V の有限個または無限個の和集合と A の共通部分であり、前者は τ に含まれているからその共通部分は τ_A に含まれる。

二つの集合 V_1, V_2 について $V_1 \cap A, V_2 \cap A$ はそれぞれ V_1 と A の両方に含まれる点の集合、および V_2 と A の両方に含まれる点の集合であるから、その二つの集合の和集合 $(V_1 \cap A) \cup (V_2 \cap A)$ は A に含まれていて、かつ V_1 または V_2 に含まれる点の集合 $(V_1 \cup V_2) \cap A$ に等しい。

また $V \cap A$ であるような集合の有限個の共通部分は τ に含まれる集合 V の有限個の共通部分と A の共通部分であり、前者は τ に含まれているからその共通部分は τ_A に含まれる。

二つの集合 V_1, V_2 について $V_1 \cap A, V_2 \cap A$ の共通部分 $(V_1 \cap A) \cap (V_2 \cap A)$ は A に含まれていて、かつ V_1 にも V_2 にも含まれる点の集合 $(V_1 \cap V_2) \cap A$ に等しい。

補題 16. X を位相空間とする。 X の部分集合 A は次の条件が満たされる時、またそのときのみ A の相対位相においてコンパクトである。

A を被覆する X の開集合のいかなる組 \mathcal{U} についても、 $A \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$ となるような \mathcal{U} に含まれる有限個の集合の組 V_1, V_2, \dots, V_r がある。

証明. A の部分集合 B は X のある開集合 V によって $V \cap A$ と表されるとき、またそのときのみ A の開集合である。したがって $A \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r$ となっていれば A は $V_1 \cap A, V_2 \cap A, \dots, V_r \cap A$ によって被覆され、またそうならないと被覆されない。 \square

補題 17. A をあるコンパクトな位相空間 X の閉部分集合であるとすると、 A はコンパクトである。

証明. \mathcal{U} を A を被覆する X の開集合の組であるとする。 \mathcal{U} に開集合 $X \setminus A$ を付け加えると X を被覆する開被覆を得る (\mathcal{U} に属する開集合の和集合は A を含む。したがってそれと $X \setminus A$ との和集合は X を含む)。 X はコンパクトであるからこの開被覆には有限の部分被覆がある。さらに A は、この有限部分被覆に属する \mathcal{U} の集合の組に属する開集合によって被覆される。したがって補題 16 により A はコンパクトである。 \square

補題 18. X をハウスドルフ位相空間、 K を X のコンパクトな部分集合とする。 x を $X \setminus K$ の点とすると $x \in V, K \subset W, V \cap W = \emptyset$ を満たすような X の開集合 V, W がある。

証明. X はハウスドルフ空間であるから各 $y \in K$ に対して $x \in V_{x,y}, y \in W_{x,y}, V_{x,y} \cap W_{x,y} = \emptyset$ を満たすような開集合 $V_{x,y}, W_{x,y}$ が存在する。そのとき、 K はコンパクトであるから K が $W_{x,y_1} \cup W_{x,y_2} \cup \cdots \cup W_{x,y_r}$ に含まれるような有限集合 $\{y_1, y_2, \dots, y_r\}$ がある (K に含まれるすべての $y \in K$ に対する $W_{x,y}$ の和集合に K は含まれるからその和集合は K の開被覆となる。 K のコンパクト性によって有限部分被覆が存在する)。

$$V = V_{x,y_1} \cap V_{x,y_2} \cap \cdots \cap V_{x,y_r}, \quad W = W_{x,y_1} \cup W_{x,y_2} \cup \cdots \cup W_{x,y_r}$$

と定義すると、 V, W は開集合であり、 $x \in V, K \subset W$ かつ $V \cap W = \emptyset$ である ($V_{x,y_1} \cap V_{x,y_2} \cap \cdots \cap V_{x,y_r}$ に含まれる点はすべての $V_{x,y_i} (i = 1, 2, \dots, r)$ に含まれているから、 $W_{x,y_1}, W_{x,y_2}, \dots, W_{x,y_r}$ のいずれにも含まれず、したがって $W = W_{x,y_1} \cup W_{x,y_2} \cup \cdots \cup W_{x,y_r}$ に含まれない)。 \square

補題 19. ハウスドルフ位相空間のコンパクトな部分集合は閉集合である。

証明. K をハウスドルフ位相空間 X のコンパクトな部分集合とする。補題 18 より各 $x \in X \setminus K$ に対して $x \in V_x, V_x \cap K = \emptyset$ となるような開集合 V_x が存在する。そのとき $X \setminus K$ はそれに含まれるすべての x についての開集合 V_x の和集合に等しいからそれ自身開集合である ($V_x \cap K = \emptyset$ なので K の点は V_x の和集合には含まれず、一方 $X \setminus K$ の点はすべてが含まれる)。 $X \setminus K$ が開集合であるから K は閉集合である。 \square

距離空間における集合の有界性を定義する。

定義 11 (有界). X を距離空間、 d をその距離関数とする。 X の部分集合 A が次の条件を満たすと

き有界であると言う。

すべての $x, y \in A$ について $d(x, y) \leq K$ となるような負でない実数 K が存在する。

この条件を満たす最小の実数を A の直径と呼び $\text{diam}A$ と表す。

$\text{diam}A$ は A に属するすべての x, y についての $d(x, y)$ の上限である。この有界性の定義は当然ユークリッド空間にも当てはまる。

ここでユークリッド空間におけるコンパクト性に関する次の定理を示す。

定理 7. K を \mathbb{R}^n の部分集合とすると、 K は閉集合かつ有界であるとき、またそのときにのみコンパクトである。

証明. K がコンパクトであると仮定する。すると \mathbb{R}^n はハウスドルフ空間であり、補題 19 よりハウスドルフ空間のコンパクトな部分集合は閉集合であるから K は閉集合である。各自然数 m について B_m を \mathbb{R}^n の原点を中心とする半径 m の開球、すなわち $B_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < m\}$ であるとする ($|\mathbf{x}|$ は \mathbf{x} と中心との距離、あるいはベクトル \mathbf{x} の大きさである。ノルムと呼ばれることもある)、開球の組 $\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ は \mathbb{R}^n の開被覆となる。 K がコンパクトであるから $K \subset B_{m_1} \cup B_{m_2} \cup \dots \cup B_{m_k}$ となるような自然数 m_1, m_2, \dots, m_k がある。そのとき B_m の定義から M を m_1, m_2, \dots, m_k の最大値として $K \subset B_M$ となる。したがって K は有界である。

逆に K は有界な閉集合であると仮定しよう。そのとき K が次の式で定義される閉集合 C に含まれるような実数 L が存在する。

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : -L \leq x_j \leq L, j = 1, 2, \dots, n\}$$

ハイネ・ボレルの定理 (定理 4) により閉区間 $[-L, L]$ はコンパクトであり、また上の C は $[-L, L]$ の n 個の直積集合である。したがって定理 5 により C もコンパクトである。 K は C の閉部分集合であり、コンパクトな位相空間の閉部分集合はコンパクトであるから (補題 17) K はコンパクトである。□

13.7 点列と収束, 関数の最大・最小

定義 12. 位相空間 X における点列 x_1, x_2, \dots は次の条件を満たすとき X の点 p に収束すると言う。

p を含むどのような開集合 U についてもある自然数 N があって、すべての $j \geq N$ (N 以上の番号の点列) について $x_j \in U$ となっている。

そのとき p を点列の極限と呼ぶ。これは p を含む開集合 U をどんなに小さくとってもある番号以上の点列がすべてその中に含まれるということであるから、点列が限りなく p に近づいて行くことを意味する。

ハウスドルフ空間においては点列の極限はただ一つであることが示される。

補題 20. ハウスドルフ空間 X における点列が収束するとき、ただ 1 点に収束する。

証明. 点列を $(x_j : j \in \mathbb{N})$ で表し (\mathbb{N} は自然数の集合 $\{1, 2, 3, \dots\}$ である), さらに (x_j) と簡略化する。 (x_j) の極限が p と q の二つあるものと仮定しよう。 X はハウスドルフ空間であるから $p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset$ を満たす開集合 U, V がある。 p, q はともに極限であるから $j \geq N_1$ および $j \geq N_2$ について $x_j \in U, x_j \in V$ となるような自然数 N_1, N_2 が存在する。そのとき $x_j \in U \cap V$ となるが、 $U \cap V = \emptyset$ であるからそれは不可能である。したがって極限は一つしかない。□

収束しない点列もある。たとえば 1 次元ユークリッド空間において $1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$ と 1 と 2 をくり返す点列や、 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ と限りなく大きくなって行く点列は収束しない。

補題 21. X を位相空間, F を X の閉集合, $(x_j : j \in \mathbb{N})$ を F の点列とする。 $(x_j : j \in \mathbb{N})$ が X のある点 p に収束するならば $p \in F$ である。

証明. p が F に属さない, したがって F の補集合 $X \setminus F$ に属すると仮定してみよう。 F は閉集合であるから $X \setminus F$ は開集合である。 $(x_j : j \in \mathbb{N})$ が p に収束するから $j \geq N$ に対して $x_j \in X \setminus F$ となるような自然数 N がある。しかし, これは x_j が F に属することに矛盾する。したがって $p \in F$ である。□

これは閉集合の重要な特徴である。

補題 22. f をコンパクトなユークリッド空間 X (位相空間でもよいが) から 1 次元ユークリッド空間 (実数の空間) \mathbb{R} への連続関数とする。そのとき f は X において上, 下に有界である。

証明. 補題 5 より $f(X)$ の値域はコンパクトである。 \mathbb{R} はある自然数 $m \in \mathbb{N}$ によって $(-m, m)$ の形に表される开区間の組によって被覆される (m を 1 から順にとり, 無限個の开区間の和集合を考えればよい)。その部分集合である $f(X)$ の値域もそのような开区間の組によって被覆されるが, コンパクト性によって有限個のそのような区間 I_1, I_2, \dots, I_k によって被覆される。したがって M を $(-M, M)$ が I_1, I_2, \dots, I_k の中で最大の区間となるようにとれば $f(X) \subset (-M, M)$ となる。ゆえに f は上にも下にも有界である。□

これを踏まえてコンパクトなユークリッド空間上の実数値関数には最大値, 最小値が存在することを示す。

補題 23. f をコンパクトなユークリッド空間 X から \mathbb{R} への連続関数とする。そのときすべての $x \in X$ について $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ となるような X の点 u, v がある。

証明. $m = \inf\{f(x) : x \in X\}, M = \sup\{f(x) : x \in X\}$ とする ($m = \inf\{f(x) : x \in X\}$ はすべての $x \in X$ について $m \leq f(x)$ を満たす最大の実数で下限, また $M = \sup\{f(x) : x \in X\}$

はすべての $x \in X$ について $M \geq f(x)$ を満たす最小の実数で上限である。 m, M 自身が $f(x)$ の値であるとは限らないので最大値, 最小値とは意味が異なる。最大値, 最小値は X に含まれる x についての $f(x)$ の値でなければならない) もしすべての $x \in X$ について $f(x) < M$ であるとする, $x \in X$ について $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ となるような関数を考えれば, 連続でかつ上に有界ではない ($g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ は $y = f(x)$ と $z = \frac{1}{M-y}$ の合成関数であり, それぞれは連続である。また M は $f(x)$ の上限であるからいくらかでも M に近い $f(x)$ の値がある。もしある $M' < M$ について $f(x) \leq M'$ であれば M は上限ではない)。しかしこれは補題 22 に矛盾する。したがって $f(v) = M$ となる $v \in X$ がある。同様に, すべての $x \in X$ について $f(x) > m$ であるとする, $x \in X$ について $h(x) = \frac{1}{f(x)-m}$ となるような関数を考えれば, 連続でかつ上に有界ではない (m は $f(x)$ の下限なのでいくらかでも m に近い $f(x)$ の値がある。もしある $m' > m$ について $f(x) \geq m'$ であれば m は下限ではない)。したがって $f(u) = m$ となる $u \in X$ がある。 m と M の定義から $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ である。□

13.8 近傍, 閉包, 内部

はじめに近傍を定義する。

定義 13 (近傍). X を位相空間, x を X の点, N を x を含む X の部分集合とする。 $x \in U$ および $U \subset N$ を満たす開集合 U があるならば, N は x の近傍であると言う。

補題 24. X を位相空間とすると, X の部分集合 V が V に含まれるあらゆる点の近傍であるとき, またそのときにのみ X の開集合である。

証明. 近傍と開集合の定義により V が開集合であれば V はそれが含むあらゆる点の近傍である。逆に, V がそれが含むあらゆる点の近傍であると仮定すると, V の任意の点について $v \in U_v$, $U_v \subset V$ となるような開集合 U_v が存在する。 V はこのような U_v の和集合であるから開集合である (V に属する点 v は $v \in U_v$ を満たす U_v に属する。またすべての U_v は V に含まれるからすべての U_v の和集合は V と一致する)。□

次に閉包と内部を定義する。

定義 14 (閉包・内部). (1). X を位相空間, A をその部分集合 (部分空間とも言う) とする。 A を含む X の閉部分集合全体の共通部分を X における A の閉包と呼び \bar{A} と表す。

(2). X を位相空間, A をその部分集合とする。 A に含まれる X の開部分集合全体の和集合を X における A の内部と呼び A^0 と表す。

A の閉包は次のような特徴を持つ。

- (1). A の閉包 \bar{A} は A を含む閉集合である。(閉集合の共通部分は閉集合である)
- (2). F を A を含む任意の閉集合とすると F は \bar{A} を含む。 $(\bar{A}$ は F と他の閉集合の共通部分に含

まれている)

同様に A の内部は次のような特徴を持つ。

- (1). A の内部 A^0 は A に含まれる開集合である。(開集合の和集合は開集合である)
- (2). U を A に含まれる任意の開集合とすると U は A^0 に含まれる。(A^0 は U と他の開集合の和集合になっている)

補題 25. X を位相空間, A をその部分集合とする。 A の点列 x_1, x_2, x_3, \dots が X の点 p に収束するとき, p は A の閉包 \bar{A} の点である。

証明. F を A を含む任意の閉集合とするとすべての j について $x_j \in F$ であるから $p \in F$ である(閉集合における点列の極限はその閉集合に属する, 補題 21)。したがって $p \in \bar{A}$ が得られる。 \square

これは閉包の重要な性質である。 p は A に含まれるとは限らない。たとえば 1 次元ユークリッド空間における开区間 $(0, 1)$ の点列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ は 0 に収束するが 0 は $(0, 1)$ には含まれない。しかしその閉包 $[0, 1]$ には含まれる。

13.9 完備距離空間

まずコーシー列と距離空間の完備性を定義する。

定義 15 (コーシー列, 完備距離空間). X を距離空間, d をその距離関数とする。次の条件を満たす X の点列 x_1, x_2, x_3, \dots をコーシー列と呼ぶ。

任意の ε に対して, $j \geq N, k \geq N$ を満たす j, k について $d(x_j, x_k) < \varepsilon$ が成り立つような自然数 N が存在する。

これは点列の中のある番号以上の点同士の距離をいくらでも小さくできることを意味する。距離空間 X のコーシー列が常に X において極限を持つとき, X は完備であると言う。

たとえば开区間は完備ではない。开区間 $(0, 1)$ を考えてみよう。点列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ をとるとこれはコーシー列となる ($n(n+1) > \frac{1}{\varepsilon}$ を満たす自然数 n をとれば, どのような ε に対しても $|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| < \varepsilon$ となるようにできる)。しかしこの点列の極限は 0 であり, 开区間 $(0, 1)$ には属していない。

次の補題は, すべての点列が収束する部分列を持つような距離空間は完備であることを主張する。

補題 26. X を距離空間とする。 X のすべての点列が収束する部分列を持つならば X は完備である。

証明. x_1, x_2, x_3, \dots を X のコーシー列とする。この点列は X の点 p に収束する部分列 $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$ を持つ。以下ではこのコーシー列自身が p に収束することを示す。

x_1, x_2, x_3, \dots はコーシー列であるから、 $\varepsilon > 0$ に対して、 $m \geq N, n \geq N$ である m, n について $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$ を満たすような自然数 N がある ($\frac{1}{2}\varepsilon$ も任意の ε の内である)。さらに、上記の部分列が p に収束することより、 N を充分大きくとれば $n_j \geq N$ であるような n_j については $d(x_{n_j}, p) < \frac{1}{2}\varepsilon$ が成り立つ。したがって三角不等式により $n \geq N$ のとき

$$d(x_n, p) \leq d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, p) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

が得られる。これはコーシー列 x_1, x_2, x_3, \dots が p に収束することを意味するから、 X は完備である。□

この補題と上の補題 6 を合わせると、コンパクトな距離空間は完備であることがわかる。

ここで全有界という言葉を実義する。

定義 16 (全有界). 任意の $\varepsilon > 0$ について、距離空間 X が直径が ε より小さい有限個の X の部分集合の和集合で表せるとき、 X は全有界であると言う。

X が全有界であれば X の部分集合も全有界である。各 $B_i (i = 1, 2, \dots, k)$ を直径が ε より小さい X の部分集合として、 $X = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ と表すことができるとすると、ある X の部分集合 A は $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \dots \cup (B_k \cap A)$ と表せ、各 $B_i \cap A$ は A の部分集合で直径は ε より小さい。

コンパクト性と全有界性の関係を考える。

補題 27. X を距離空間とする。 X のすべての点列が収束する部分列を持つば X は全有界である。

証明. X が全有界ではないと仮定すると、直径が 3ε より小さい有限個の X の部分集合の和集合では X を被覆することができないような ε (あるいは 3ε) の値がある。ここで、 X から $m < k, n < k, m \neq n$ について $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ であるような $k-1$ 個の点列 x_1, x_2, \dots, x_{k-1} を選んでいるとする。各 x_m について半径 ε の開球 $B_X(x_m, \varepsilon)$ の直径は 2ε より大きくはない (3ε より小さい) から (X が全有界ではないとの仮定により) $m < k$ である $B_X(x_m, \varepsilon)$ の組によって X を被覆することはできず、どの $B_X(x_m, \varepsilon)$ にも含まれない点 x_k がある。そのとき $m < k$ について $d(x_m, x_k) \geq \varepsilon$ である。どのような有限の k についてもこのことが成り立つから、同じようにして無限個の点列 x_1, x_2, \dots を得ることができる。しかし、その点列に含まれる点の互いの距離は ε 以上なので収束する部分列を持たない。以上のことから X が収束する部分列を持つば X は全有界でなければならない。□

距離空間の部分集合とその閉包の関係について次の結果を得る。

補題 28. X を距離空間、 A をその部分集合とする。そのとき \bar{A} を A の閉包とすれば $\text{diam} A = \text{diam} \bar{A}$ である。

証明. \bar{A} は A を含むので $\text{diam} A \leq \text{diam} \bar{A}$ である。 x, y を \bar{A} の点とすると、任意の ε について $d(x, x') < \varepsilon, d(y, y') < \varepsilon$ を満たす A の点 x', y' がある。もしそうでなければ、すなわち (たとえ

ば x について) ある ε に対して $d(x, x') < \varepsilon$ となる A の点 x' が存在しないとすると開球 $B_X(x, \varepsilon)$ の補集合が A を含む閉集合であって, かつその閉包 \bar{A} の点 x を含まないことになり閉包の定義に矛盾する。距離の三角不等式より

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) < \text{diam}A + 2\varepsilon$$

が得られる。したがってあらゆる $\varepsilon > 0$ について $d(x, y) < \text{diam}A + 2\varepsilon$ であるから $d(x, y) \leq \text{diam}A$ が得られる (もし $d(x, y) > \text{diam}A$ であれば十分に小さい $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \frac{1}{2}[d(x, y) - \text{diam}A]$) となるような) について $d(x, y) > \text{diam}A + 2\varepsilon$ となってしまう)。ゆえに $\text{diam}\bar{A} \leq \text{diam}A$ となり, $\text{diam}A \leq \text{diam}\bar{A}$ と合わせて $\text{diam}A = \text{diam}\bar{A}$ が得られる。□

次に完備かつ全有界な距離空間はコンパクトであることを示す。

補題 29. 完備かつ全有界であるような距離空間はコンパクトである。

証明. X を全有界な距離空間とする。 X の開被覆の内では有限の部分被覆を持たないものがある (すなわち X がコンパクトではない) と仮定し, そのような開被覆を \mathcal{V} とする。 X のコーシー列 x_1, x_2, x_3, \dots の中に X の点に収束しないものがある (すなわち X が完備でない) ことを示さなければならない。

$\varepsilon > 0$ とする。 X は全有界であり, 補題 28 によって X のすべての部分集合はその閉包と同じ直径を持つから, X は直径が ε より小さい有限個の閉集合によって被覆される。仮定により少なくとも一つのそのような閉集合は \mathcal{V} に属する有限個の開集合によって被覆されない (もしすべての閉集合が \mathcal{V} に属する有限個の開集合によって被覆されるならば, そのような被覆の和集合をとることによって X の有限な部分被覆を得ることができ, X はコンパクトとなる)。したがって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して直径が ε より小さく \mathcal{V} の有限個の開集合によっては被覆されない X の閉部分集合が存在する。

次に以下のことを示す。

$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ を満たし, 各 F_n が $\frac{1}{2^n}$ より小さい直径を持ち, かつ \mathcal{V} に属する有限個の開集合によっては被覆されないような X の閉集合の列 F_1, F_2, F_3, \dots が存在する。

X の閉部分集合で直径が $\frac{1}{2}$ より小さいものを F_1 とすると, これは X の部分集合であるから全有界である。上の議論を F_1 に適用すると任意の $\varepsilon > 0$ について \mathcal{V} に属する有限個の開集合によっては被覆されないような F_1 の閉部分集合が存在する。その内直径が $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ より小さいものを F_2 とする。同様に n に関する帰納法によって求める閉集合の列を得る。

各 $n \in \mathbb{N}$ について点 $x_n \in F_n$ を選ぶ。すると $m > n$ であるような m, n について x_m, x_n がともに F_n に属し, $\text{diam}F_n < \frac{1}{2^n}$ であるから $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^n}$ である。したがって x_1, x_2, x_3, \dots はコーシー列となる。このコーシー列が X の点 p に収束すると仮定しよう。 F_n は閉集合で $m \geq n$ について $x_m \in F_n$ であるから, 各 $n \in \mathbb{N}$ について $p \in F_n$ である (距離空間または位相空間の閉部分集合に属する点列が収束するならば点列の極限はその閉集合に属する)。 \mathcal{V} は X の開被覆で

あるから \mathcal{V} のある開集合 V について $p \in V$ である。そのとき $B_X(p, \delta)$ を X における p を中心とする半径 δ の開球とすると, $B_X(p, \delta) \subset V$ を満たすような δ が存在する (V は開集合であるから)。したがって n が十分に大きく $\frac{1}{2^n} < \delta$ であるときには $p \in F_n$ かつ $\text{diam} F_n < \delta$ であるから $F_n \subset B_X(p, \delta) \subset V$ となり, \mathcal{V} の有限個の開集合によって F_n が被覆されないということと矛盾する。ゆえにコーシー列 x_1, x_2, x_3, \dots は収束せず X は完備ではない。

以上のことから完備で全有界な距離空間はコンパクトでなければならない。 □

距離空間のコンパクト性は次のようにまとめられる。

定理 8. X を距離空間, d をその距離関数とすると次の三つの表現は同値である。

- (1). X はコンパクトである。
- (2). X のすべての点列は収束する部分列を持つ。
- (3). X は完備かつ全有界である。

証明. 補題 6, 26, 27, 29 より (1) が (2) を, (2) が (3) を, (3) が (1) を意味することがわかる。したがって (1), (2), (3) は互いに同値である。 □

13.10 ルベグの補題と一様連続性

補題 30 (ルベグの補題). (X, d) を (d を距離関数とする) コンパクトな距離空間, \mathcal{U} を X の開被覆とする。そのとき, 直径が δ より小さいすべての X の部分集合がそれぞれ開被覆 \mathcal{U} に属する集合の一つに含まれるような正の実数 δ が存在する。

証明. X の各点は開被覆 \mathcal{U} に属する集合の一つに含まれる。したがって X の各点 x について x を中心とする半径 $2\delta_x$ の開球 $B(x, 2\delta_x)$ が, \mathcal{U} に属する一つの開集合に含まれるような実数 δ_x が存在する。一方 x を中心とする半径 δ_x の開球 $B(x, \delta_x)$ の組 (X に属するすべての x について開球 $B(x, \delta_x)$ を集めたもの) は X を被覆し, X がコンパクトであることから

$$B(x, \delta_1) \cup B(x, \delta_2) \cup \dots \cup B(x, \delta_r) = X, \quad \delta_i = \delta_{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

となるような有限個の点 x_1, x_2, \dots, x_r がある。 δ を $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ の中で最小のものとする。 A を直径が δ より小さい X の部分集合, u をその点とする。すると u は 1 から r までのある整数 i について $B(x_i, \delta_i)$ に属する。そのとき A の任意の点 v について距離の三角不等式によって

$$d(v, x_i) \leq d(v, u) + d(u, x_i) < \delta + \delta_i \leq 2\delta_i$$

となるから $A \subset B(x_i, 2\delta_i)$ である。一方 $B(x_i, 2\delta_i)$ は \mathcal{U} に属する一つの集合に含まれるから, A もその集合に含まれる。 □

U をコンパクトな距離空間 X の開被覆とする。直径が δ より小さい X の部分集合のそれぞれが U に属する開集合の一つに含まれるような正の実数 δ をルベグ数と言う。上の補題はコンパクトな距離空間の各開被覆にルベグ数が存在することを示している。

X, Y をそれぞれ d_X, d_Y を距離関数とする距離空間とし、 $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への関数とする。 f が次の条件を満たすとき一様連続であると言う。

任意の $\varepsilon > 0$ についてある $\delta > 0$ があり、 $d_X(x, x') < \delta$ を満たす X の点 x, x' について $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ が成り立つ (δ の大きさは x, x' とは独立である)。

定理 9. X, Y を距離空間とし、 X はコンパクトであるとする。そのとき X から Y への連続な関数は一様連続である。

証明. d_X, d_Y をそれぞれ距離空間 X, Y の距離関数とし、 $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への連続関数とする。

任意の ε をとり、各 $y \in Y$ に対して

$$V_y = \{x \in X : d_Y(f(x), y) < \frac{1}{2}\varepsilon\}$$

と定義する ($f(x)$ と y の距離が $\frac{1}{2}\varepsilon$ より小さい x の集合)。 y を中心とする半径 $\frac{1}{2}\varepsilon$ の Y における開球を $B_Y(y, \frac{1}{2}\varepsilon)$ とすると $V_y = f^{-1}(B_Y(y, \frac{1}{2}\varepsilon))$ である。開球 $B_Y(y, \frac{1}{2}\varepsilon)$ は開集合であり、 f は連続であるから、すべての y について V_y は X において開集合であり、またすべての $x \in X$ について $x \in V_{f(x)}$ である。

そのとき V_y の組 $\{V_y : y \in Y\}$ は距離空間 X の開被覆となる。したがってルベグの補題 (補題 30) により直径が δ より小さいすべての X の部分集合が、ある V_y の部分集合となるような $\delta > 0$ がある。 x, x' を $d_X(x, x') < \delta$ を満たす点とすると、集合 $\{x, x'\}$ (x と x' の 2 点からなる集合) の直径は $d_X(x, x')$ であり、それは δ より小さい。したがって $x \in V_y$ かつ $x' \in V_y$ となるような $y \in Y$ がある。そのとき $d_Y(f(x), y) < \frac{1}{2}\varepsilon, d_Y(f(x'), y) < \frac{1}{2}\varepsilon$ であるから

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), y) + d_Y(f(x'), y) < \varepsilon$$

となる。これは $f: X \rightarrow Y$ が一様連続であることを示している。 □

13.11 同相・同相写像

定義 17 (恒等写像, 包含写像, 定値写像). 位相空間 X から X への関数 $f(x)$ で、 X の各点 x に x 自身を対応させる関数を恒等写像と呼び id_X と表す。また、 $A \subset X$ について、 A の各点にその点自身を対応させる A から X への関数を包含写像と呼び i_A で表す。さらに、すべての X の点のあるただ一つの Y の点に対応させる X から Y への関数を定値写像と言う。

本稿では点から点への写像だけを考えるので「写像」と「関数」を同じ意味で用いる。

定義 18 (同相・同相写像). X, Y を位相空間とする。次の条件を満たす X から Y への関数 h を同相写像と呼ぶ。

- (1). h は単射かつ全射である。そのとき Y から X への逆関数 (逆写像) h^{-1} が存在する。
- (2). h も, その逆関数 h^{-1} も連続である。

【注】 「単射」とはそれぞれの $f(x)$ に対応する x がただ一つだけであることを, 全射とはすべての Y の点 $y \in Y$ についてそれに対応する x が存在することを意味する。単射かつ全射ならばすべての $y \in Y$ に対応する x があり, しかも一つの $f(x)$ に対応する x は一つだけであるから X の要素と Y の要素は一対一に対応する。そのとき全単射とも呼ばれる。 h が全射でなければ Y の要素全体が対応しないので逆関数は定義できない。また h が単射でなければある $f(x)$ に対応する x が複数あるのでやはり逆関数が定義できない。逆に h が単射かつ全射であればすべての Y の要素に対してただ一つの x を対応させられるので逆関数を定義することができる。

X から Y への同相写像が存在するとき二つの位相空間 X と Y は同相であると言われる。そのとき X と Y は同一の空間と見なしてもよい。 h と h^{-1} の合成関数は X の恒等写像である (h によって X, Y の点が一対一に対応させられ, h^{-1} によって逆向きに一対一に対応させられるから元の X に点に対応する), すなわち $h^{-1} \circ h = id_X$, また h^{-1} と h の合成関数は Y の恒等写像である, すなわち $h \circ h^{-1} = id_Y$ 。

この同相という関係は次に定義する同値関係である。

定義 19 (同値関係). ある集合の要素 (x, y, z で代表させる) についてのある関係 R が次の条件を満たすとき同値関係であると言う。

- (1). 反射性: xRx である。
- (2). 対称性: xRy ならば yRx である。
- (3). 推移性: xRy かつ yRz ならば xRz である。

補題 31. 同相という関係は同値関係である。

証明. 位相空間 X について X から X への恒等写像が同相写像となるので反射性が成り立つ (X と X は同相)。ある関数 f が X から Y への同相写像であれば f^{-1} が Y から X への同相写像となるので対称性も成り立つ (X と Y が同相ならば Y と X も同相)。

位相空間 X と Y が同相, Y と Z が同相であれば同相写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ が存在する。 f, g は全単射かつ連続であり, 逆写像 f^{-1}, g^{-1} も全単射, 連続である。したがって合成写像 $g \circ f$ も全単射, 連続, その逆写像 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ も全単射, 連続であるから $g \circ f$ が X から Z への同相写像となり X と Z は同相である。以上によって推移性も成り立ち, 同相という関係は同値関係であることが示された。□

例 2. 円 (円周, 内部両方含むもの) と三角形 (周囲, 内部を含む) は同相である。まず大きさの

異なる二つの円は明らかに同相である。二つの円の半径の比が $1:t (t > 1)$ であるとする。二つの円を同心円にして配置し、その中心から外側へ向けて直線を引き、その直線に沿って小さい方の円に属する点を中心から t 倍の位置に移す関数を考え、それを円全体を覆うように一周させると、小さい円全体と大きい円全体との同相写像が得られる。

次に適当な大きさの円を三角形の内部に入れる（内接させてもよい）。円の半径を $r (> 0)$ とする。円の中心から外側へ向けて直線を引き三角形の辺（または頂点）と交わった点と中心との距離を $\lambda (\geq r)$ とする（その点が円と三角形とが接する点であれば距離は r に等しい）。その直線に沿って円に属する点を中心から $\frac{\lambda}{r}$ 倍の位置に移す関数を考えると、これは同相写像になる。同様にして円を一周させれば（直線が三角形の辺と交わる点の位置によって λ の値は異なるが）、円全体と三角形全体との同相写像が得られる。

例 3. 1次元ユークリッド空間 $X = \mathbb{R}$ と开区間 $Y = (-1, 1)$ は同相である。 X から Y への写像として

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad x \in X$$

を考えると、これは X から Y への全単射かつ連続な関数である（ $f(0) = 0, x \rightarrow \infty$ のとき $f(x) \rightarrow 1, x \rightarrow -\infty$ のとき $f(x) \rightarrow -1$ である）。

$$y = \frac{x}{1 + |x|}$$

として x について解けば $x \geq 0$ （かつ $y \geq 0$ ）のとき $x = \frac{y}{1-y}, x < 0$ （かつ $y < 0$ ）のとき $x = \frac{y}{1+y}$ であるから

$$x = \frac{y}{1 - |y|}$$

となり、 f の逆写像として

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

を得る。これも全単射、連続である（ $f^{-1}(0) = 0, y \rightarrow 1$ のとき $f^{-1}(y) \rightarrow \infty, y \rightarrow -1$ のとき $f^{-1}(y) \rightarrow -\infty$ ）。

14 時間が余ったときの予備 1 — 角谷の不動点定理とナッシュ均衡

これまでは通常関数、すなわち点から点への対応を考えてきたが、ここでは点から集合への対応を考えよう*13。これを「対応 (correspondence)」または「多価関数 (multi-valued function, multi-function)」と呼ぶ。以下、多価関数と呼ぶことにする。 n 次元単体 Δ から Δ の部分集合の

*13 この節と次の節では小山昭雄「経済数学教室 3 線形代数と位相上」(岩波書店)を参照した。

集合への多価関数 $F(x)$ ($F(x)$ は Δ の点を Δ の部分集合へ対応させるのでこのように言える) が満たすべき条件として、まず

すべての $x \in X$ において $F(x)$ はコンパクト (有界かつ閉) な凸集合である

と仮定する。そのとき「 F の値がコンパクトかつ凸である」と言う。凸集合とは三角形や円 (球)、長方形 (直方体) のように凹みのない出っ張った集合である。正確に言えば、その集合の 2 点を結んだ線分がすべてその集合に含まれている場合に凸であると言う。 $F(x)$ が 1 点からなる場合もコンパクトな凸集合であるから $F(x)$ はすべての x について複数の点を含む、あるいは 1 点ではない集合でなくてもよいし通常関数もこの仮定を満たす。

さらに次の条件を仮定する。

定義 20 (閉対応). 多価関数 $F(x)$ を考える。点列 x_n に対して点列 $y_n \in F(x_n)$ をとる。 x_n が x に収束するとき y_n が $F(x)$ に含まれる点に収束する ($y_n \rightarrow y$ で $y \in F(x)$) ならば、 F は x において閉じていると言う。 F がすべての $x \in \Delta$ において閉じているとき閉対応であると言う。

これに関連して次の定義もある。

定義 21 (優半連続性 (upper hemi-continuity)). 多価関数 $F(x)$ を考える。 $F(x)$ の任意の $\varepsilon > 0$ 近傍 $V(x, \varepsilon)$ に対して x の $\delta > 0$ 近傍 $U(x, \delta)$ を

$$F(U(x, \delta)) \subset V(F(x), \varepsilon), \quad F(U(x, \delta)) = \cup_{x' \in U(x, \delta)} F(x')$$

が成り立つように選べるならば F は x において優半連続であると言う。 F がすべての $x \in \Delta$ において優半連続ならば Δ において優半連続である。

補題 32. Δ から Δ の部分集合の集合への多価関数 F が閉対応ならば優半連続である。

証明. F は閉対応であるが、 x において優半連続ではないと仮定する。そのとき、ある $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ をどのように選んでも、 $x' \in U(x, \delta)$ であって $F(x') \not\subset V(F(x), \varepsilon)$ となる x' がある。そのような δ について $\delta_n \rightarrow 0$ を満たす列を考える。各 δ_n について

$$x'_n \in U(x, \delta_n) \text{ かつ } F(x'_n) \not\subset V(F(x), \varepsilon)$$

を満たす x'_n をとる。そのとき $y_n \in F(x'_n)$ であって $y_n \notin V(F(x), \varepsilon)$ であるような y_n を選ぶことができる。 Δ はコンパクトであるから点列 y_n には収束する部分列がある。その極限を y とする。 $\delta_n \rightarrow 0$ だから $x'_n \rightarrow x$ である。また $y_n \in F(x'_n)$ であって $y_n \rightarrow y$ であり、 F が閉対応であるから $y \in F(x)$ である。一方 $y_n \notin V(F(x), \varepsilon)$ であるから

$$|y_n - y| \geq \varepsilon > 0$$

でなければならず $y_n \rightarrow y$ に矛盾する。よって F は優半連続である。 □

補題 33. $F(x)$ が閉集合ならば優半連続性と閉対応性は同値である。

証明. 優半連続性から閉対応性を導く。点列 $x_n \rightarrow x$ をとる。優半連続性によって

$$F(U(x, \delta)) \subset V(F(x), \varepsilon)$$

を満たす $U(x, \delta)$ がある。番号 n_0 を十分大きくとれば

$$n > n_0 \text{ のとき } x_n \in U(x, \delta)$$

が成り立つ。そのとき

$$F(x_n) \subset F(U(x, \delta)) \subset V(F(x), \varepsilon)$$

したがって

$$y_n \in F(x_n) \text{ ならば } y_n \in V(F(x), \varepsilon)$$

である。そこで $y_n \in F(x_n)$ であってある極限に収束するような点列 y_n をとり、その極限を y とすると $y_n \in V(F(x), \varepsilon)$ より

$$|y - F(x)| \leq \varepsilon, \text{ ただし } |y - F(x)| = \inf_{z \in F(x)} |y - z| (\text{inf は下限を表す})$$

が成り立つ。 $\varepsilon > 0$ は任意なので

$$|y - F(x)| = 0$$

でなければならない ($|y - F(x)| > 0$ ならば $0 < \varepsilon < |y - F(x)|$ を満たす ε がある)。 $F(x)$ は閉集合であって $|y - F(x)| = 0$ であるから $y \in F(x)$ である ($|y - F(x)| = 0$ によって y は $F(x)$ の閉包に含まれるが、 $F(x)$ が閉集合ならその閉包と一致する)^{*14}。よって F は閉対応である。 \square

多価関数の不動点とは次の条件を満たす点である。

$$x \in F(x)$$

点から集合への対応の例としてゲーム理論の最適反応を考えてみる。ナッシュ均衡について説明した所でゲーム理論の最適反応を

$$\tilde{S}_i = \{s_{ij} \mid \text{すべての } s'_{ij} \in S_i \text{ について } \pi_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}) \geq \pi_i(s'_{ij}, \mathbf{p}_{-i})\}$$

と表した。期待利得 π_i は混合戦略の確率分布に関して連続であった。この条件を満たす純粋戦略が複数あるとすると、それらを適当な割合で組み合わせた混合戦略も最適反応である。各プレイヤーの純粋戦略の数を m 、上記の条件を満たす純粋戦略が k 個あるとすると、条件を満たさない純粋戦略に割り当てる確率を 0 に固定することによって

$$p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im}), \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$$

^{*14} $|y - F(x)| = 0$ であるから $F(x)$ の点列で y に収束するものがとれるので、 y は $F(x)$ の閉包に含まれる。

と表すことができる。最適反応となっている純粋戦略のすべてではなく、一部を組み合わせた混合戦略も最適反応であるから、最適反応となっているいくつかの純粋戦略に割り当てる確率が0でもかまわない。条件を満たす各純粋戦略は $m-1$ 次元単体のいくつかの頂点に対応するから、最適反応となる混合戦略が作る図形は $m-1$ 以下の次元の単体であり、コンパクトな凸集合である（条件を満たさないものも含めてすべての純粋戦略を組み合わせて作られる混合戦略の集合は $m-1$ 次元単体全体である）。 \tilde{S}_i は \mathbf{p}_{-i} をプレイヤー i の混合戦略の集合（ $m-1$ 次元単体の部分集合）へ対応させる多価関数であるとすることができるので $\tilde{S}_i(\mathbf{p}_{-i})$ と書くことにする。すべてのプレイヤーについての $\tilde{S}_i(\mathbf{p}_{-i})$ を並べたものを \mathbf{S} とすると、それは \mathbf{p} をすべてのプレイヤーの混合戦略の集合（ $m-1$ 次元単体の n 個の積の部分集合）へ対応させる多価関数であるから $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ と書くことができる。各 \mathbf{p} について $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ はコンパクトかつ凸である（各 $\tilde{S}_i(\mathbf{p}_{-i})$ がコンパクトで凸であるから \mathbf{S} もコンパクトで凸）。

\mathbf{S} が閉対応であることを示す。 \mathbf{p}_{-i}^n を \mathbf{p}_{-i} に収束する点列、 p_i^n を $p_i^n \in \tilde{S}_i(\mathbf{p}_{-i}^n)$ を満たし p_i に収束する点列であるとする。任意の p_i' について $\pi_i(p_i^n, \mathbf{p}_{-i}^n) \geq \pi_i(p_i', \mathbf{p}_{-i}^n)$ であるから π_i の連続性により

$$\pi_i(p_i, \mathbf{p}_{-i}) \geq \pi_i(p_i', \mathbf{p}_{-i})$$

が成り立つ。これは $p_i \in \tilde{S}_i(\mathbf{p}_{-i})$ を意味するから \tilde{S}_i は閉対応であり、したがって \mathbf{S} は閉対応である。

ブラウワーの不動点定理を使って角谷の不動点定理を証明する。

定理 10. n 次元単体 Δ からその部分集合の集合への多価関数の値がコンパクトかつ凸で、閉対応であれば不動点が存在する。

証明. Δ はコンパクトなので全有界であるから任意の δ に対して有限個の点 $x_1^\delta, x_2^\delta, \dots, x_k^\delta$ を選んで

$$\Delta \subset \sum_{j=1}^k U(x_j^\delta, \delta), \quad U(x_j^\delta, \delta) \text{ は } x_j^\delta \text{ の } \delta \text{ 近傍}$$

が成り立つようにできる（細かいことを言えば k は δ に依存する）。 Δ のある点 x はいずれかの δ 近傍に含まれているが、それが $U(x_j^\delta, \delta)$ であるとして関数 $\varphi_j^\delta(x)$ を次のように定義する。

$$\varphi_j^\delta(x) = \max(0, \delta - |x - x_j^\delta|)$$

$\varphi_j^\delta(x)$ は連続であり、 x が $U(x_j^\delta, \delta)$ に含まれていれば $|x - x_j^\delta| < \delta$ であるから $\varphi_j^\delta(x) > 0$ である。 x が $U(x_j^\delta, \delta)$ に含まれない j については $\varphi_j^\delta(x) = 0$ である。どの $x \in \Delta$ についても $\varphi_j^\delta(x) > 0$ となる j があるので

$$\text{すべての } x \in \Delta \text{ について } \sum_{j=1}^k \varphi_j^\delta(x) > 0$$

である。

$$\lambda_j^\delta(x) = \frac{\varphi_j^\delta(x)}{\sum_{j=1}^k \varphi_j^\delta(x)}$$

とおけば $\lambda_j^\delta(x)$ は連続で

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j^\delta(x) = 1, \lambda_j^\delta(x) \geq 0 \quad (9)$$

が成り立つ。

各 x_j^δ についての F の値 $F(x_j^\delta)$ から任意に 1 点

$$y_j^\delta \in F(x_j^\delta)$$

を選び、この y_j^δ と $\lambda_j^\delta(x)$ を用いて関数

$$g^\delta(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j^\delta(x) y_j^\delta$$

を作る。 $y_j^\delta \in \Delta$ であるから (9) によって $g^\delta(x)$ は Δ からそれ自身への連続な関数であることがわかる。したがってブラウワーの不動点定理により

$$x^\delta = g^\delta(x^\delta)$$

を満たす不動点が存在する。ここで $\delta_n \rightarrow 0$ となる列を考えると、不動点の点列 x^{δ_n} が得られるが、 Δ はコンパクトであるからその点列は収束する部分列を含む。その部分列の極限を x^* とする。以下この x^* が F の不動点である、すなわち $x^* \in F(x^*)$ が成り立つことを確認する。

補題 32 によって F は x において優半連続であるから

$$F(U(x^*, \delta)) \subset V(F(x^*), \varepsilon)$$

が成り立つように δ を選ぶことができる。 $\delta_n \rightarrow 0$ なので十分大きな番号 n_0 に対して

$$n \geq n_0 \text{ のとき } \delta_n < \frac{\delta}{2} \text{ かつ } |x^* - x^{\delta_n}| < \frac{\delta}{2} \quad (10)$$

となる。 $\lambda_j^{\delta_n}(x) > 0$ のとき $x \in U(x_j^{\delta_n}, \delta_n)$ であるから $|x - x_j^{\delta_n}| < \frac{\delta}{2}$ である。したがって各 δ_n について

$$\lambda_j^{\delta_n}(x^{\delta_n}) > 0 \text{ のとき } |x^{\delta_n} - x_j^{\delta_n}| < \frac{\delta}{2} \quad (11)$$

が成り立ち、(10), (11) により

$$\lambda_j^{\delta_n}(x^{\delta_n}) > 0 \text{ のとき } |x_j^{\delta_n} - x^*| \leq |x_j^{\delta_n} - x^{\delta_n}| + |x^{\delta_n} - x^*| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

が得られる。これは $x_j^{\delta n} \in U(x^*, \delta)$ を意味するから

$$F(x_j^{\delta n}) \subset V(F(x^*), \varepsilon)$$

が成り立ち $y_j^{\delta n} \in V(F(x^*), \varepsilon)$ を得る。以上によって

$$\lambda_j^{\delta n}(x^{\delta n}) > 0 \text{ のとき } y_j^{\delta n} \in V(F(x^*), \varepsilon) \quad (12)$$

が成り立つ。 $x^{\delta n}$ は $g^{\delta n}$ の不動点であるから

$$x^{\delta n} = \sum_{j=1}^k \lambda_j^{\delta n}(x^{\delta n}) y_j^{\delta n}$$

と書ける。(12)により $\lambda_j^{\delta n}(x^{\delta n}) > 0$ のときに $y_j^{\delta n} \in V(F(x^*), \varepsilon)$ であり、 $V(F(x^*), \varepsilon)$ は凸集合である ($F(x^*)$ が凸集合であるので) から、この式は $x^{\delta n} \in V(F(x^*), \varepsilon)$ であることを意味する。したがって

$$|x^{\delta n} - F(x^*)| < \varepsilon$$

が成り立つ。 $x^{\delta n} \rightarrow x^*$ であるから

$$|x^* - F(x^*)| \leq \varepsilon$$

となるが $\varepsilon > 0$ は任意であるから

$$|x^* - F(x^*)| = 0$$

を得る。 $F(x^*)$ は閉集合なので

$$x^* \in F(x^*)$$

が成り立つ。以上で証明が終わった。 □

最適反応を表す多価関数 \mathbf{S} は閉対応であり、各 \mathbf{p} について $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ はコンパクトで凸であるから角谷の不動点定理によって \mathbf{S} は不動点を持つ*15。それを \mathbf{p}^* とすると $\mathbf{p}^* \in \mathbf{S}(\mathbf{p}^*)$ 、すなわち各プレイヤーにとって $p_i^* \in \tilde{S}(\mathbf{p}_{-i}^*)$ であるから、各プレイヤーの戦略は互いに最適反応になっており、 \mathbf{p}^* が表す戦略の組はナッシュ均衡である。

15 時間が余ったときの予備 2 — Gale-Nikaido の補題

ここでは需要関数や供給関数が多価関数であるときに競争経済の均衡の存在を証明するのに用いられる Gale-Nikaido (二階堂) の補題を角谷の不動点定理から導こう。

*15 単体と同相な集合上の多価関数の不動点については次の節を見ていただきたい。

定理 11 (Gale-Nikaido の補題).

$$\Delta^{n-1} = \left\{ x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

とし, Z を R^n (n 次元ユークリッド空間) のコンパクトな凸集合とする。 Δ^{n-1} の各点 x を Z の部分集合 $F(x)$ に写す多価関数

$$F : \Delta^{n-1} \longrightarrow Z$$

が次の条件を満たすとする。

- (1). 各 x に対して $F(x)$ は Z のコンパクトな凸集合である。
- (2). F は閉対応である。
- (3). 任意の $x \in \Delta^{n-1}$ と $z \in Z$ に対して $xz \leq 0$ である (xz はベクトルの内積, 成分同士の積の和)。

このときある $x^* \in \Delta^{n-1}$ に対して

$$z^* \in F(x^*), z^* \leq 0$$

を満たす z^* が存在する ($z \leq 0$ はベクトルの各成分が 0 以下であることを意味する)。

証明. 任意の $x \in \Delta^{n-1}$ と $z \in Z$ について

$$g(x, z) = (g_1(x, z), g_2(x, z), \dots, g_n(x, z))$$

$$g_i(x, z) = \frac{x_i + \max(0, z_i)}{1 + \sum_{j=1}^n \max(0, z_j)}$$

とおく。 $g_i(x, z) \geq 0$ かつ $\sum_{i=1}^n g_i(x, z) = 1$ であるから $g(x, z)$ は $\Delta^{n-1} \times Z$ から Δ^{n-1} への連続関数である。 $F(x)$ は Z のコンパクトな凸集合であるから $g(x, z) \times F(x)$ は $\Delta^{n-1} \times Z$ のコンパクトな凸集合である。

$$h(x, z) = g(x, z) \times F(x)$$

とおくと h は $\Delta^{n-1} \times Z$ の点 (x, z) を $\Delta^{n-1} \times Z$ のコンパクトな凸集合 $g(x, z) \times F(x)$ へ写す多価関数である。まずこれが閉対応であることを示そう。 $\Delta^{n-1} \times Z$ の点列 (x_n, z_n) で (x, z) に収束するものを任意に選び, $(x'_n, z'_n) \in h(x_n, z_n)$ であるような (x'_n, z'_n) をとったとき $(x'_n, z'_n) \rightarrow (x', z')$ であるとする。このとき $(x'_n, z'_n) \in g(x_n, z_n) \times F(x_n)$ であるが $g(x_n, z_n)$ は Δ^{n-1} の 1 点であり, $F(x_n) \subset Z$ であるから

$$x'_n = g(x_n, z_n), z'_n \in F(x_n)$$

となっている。 g は連続, F は閉対応であって

$$(x_n, z_n) \rightarrow (x, z), (x'_n, z'_n) \rightarrow (x', z')$$

となるので

$$x' = g(x, z), z' \in F(x)$$

が成り立つ。したがって $(x', z') \in h(x, z)$ であるから h は閉対応である。 $\Delta^{n-1} \times Z$ はコンパクトな凸集合なので (Δ^{n-1} と Z がそれぞれコンパクトな凸集合であることから $\Delta^{n-1} \times Z$ はコンパクトな凸集合である), 同じ次元 ($2n-1$ 次元) の単体 (Δ^{2n-1}) と同相であるから角谷の不動点定理を $\Delta^{n-1} \times Z$ 上の多価関数にも適用することができ, h は不動点を持つ。それを (x^*, z^*) とする。

$(x, z) \in \Delta^{n-1} \times Z, (x', z') \in \Delta^{n-1} \times Z$ として $\lambda(x, z) + (1-\lambda)(x', z'), \lambda \geq 0$ を考えると, これは $(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda z + (1-\lambda)z')$ と書ける。 $\lambda x + (1-\lambda)x' \in \Delta^{n-1}, \lambda z + (1-\lambda)z' \in Z$ であるから $\lambda(x, z) + (1-\lambda)(x', z') \in \Delta^{n-1} \times Z$ となり $\Delta^{n-1} \times Z$ は凸集合である。コンパクト集合の直積がコンパクト集合であることは定理 5 で証明した。

$\Delta^{n-1} \times Z$ から Δ^{2n-1} への同相写像を φ とすると, $\varphi(x, z) = y$ は $\Delta^{n-1} \times Z$ の点 (x, z) を Δ^{2n-1} の点 y へ 1 対 1 に連続的に写す。逆に $\varphi^{-1}(y) = (x, z)$ は Δ^{2n-1} の点 y を $\Delta^{n-1} \times Z$ の点 (x, z) へ 1 対 1 に連続的に写す。

$$\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$$

とおくと, これは Δ^{2n-1} から Δ^{2n-1} の部分集合の集合への閉対応になるから不動点 y^* が存在する。 $y^* \in \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}(y^*)$ より

$$\varphi^{-1}(y^*) \in h \circ \varphi^{-1}(y^*)$$

となるが, この式は $\Delta^{n-1} \times Z$ の点 $\varphi^{-1}(y^*)$ が h の不動点であることを意味する。

x^* の成分を見ると

$$x_i^* = \frac{x_i^* + \max(0, z_i^*)}{1 + \sum_{j=1}^n \max(0, z_j^*)}$$

であるが, $\gamma = \sum_{j=1}^n \max(0, z_j^*)$ とおくと $\gamma \geq 0$ であり

$$\gamma x_i^* = \max(0, z_i^*)$$

となる。両辺に z_i^* をかけて i について加えると

$$\gamma \sum_{i=1}^n x_i^* z_i^* = \sum_{i=1}^n \max(0, z_i^*) z_i^*$$

より

$$\gamma xz = \sum_{i=1}^n \max(0, z_i^*) z_i^*$$

を得る。 xz はベクトルの内積である。この定理の条件からこれは正ではないから

$$\sum_{i=1}^n \max(0, z_i^*) z_i^* \leq 0 \tag{13}$$

である。 $z_i^* \leq 0$ ならば $\max(0, z_i^*)z_i^* = 0$, $z_i^* > 0$ ならば $\max(0, z_i^*)z_i^* > 0$ であるから

$$\max(0, z_i^*) = 0$$

でなければならない。よって $z^* \leq 0$ である。以上で証明が終わった。□

この定理で x を n 個の財の価格ベクトル, z をそれらの超過需要のベクトル, $F(x)$ を超過需要関数 (多価関数) と考えると, 超過需要が 0 以下 ($z \leq 0$) となる競争均衡の存在を意味している。 $xz \leq 0$ は一般化された (あるいは弱い) ワルラスの法則である (通常は $xz = 0$)。

16 時間が余ったときの予備 3 — ブラウワーの不動点定理による NTU (譲渡不可能効用) ゲームにおけるコアの存在証明

NTU (譲渡不可能効用) ゲームにおける「平衡ゲームにコアが存在する」というコアの存在定理は Scarf^{*16}によってある種のアルゴリズムを用いる形で証明されたが, 後に Shapley^{*17}が角谷の不動点定理によって K-K-M-S 定理と呼ばれる定理を証明し, それを用いてコアの存在を証明した。また Shapley と Vohla^{*18}は角谷の不動点定理を用いて直接コアの存在定理を証明した。その後 Zhou^{*19}はブラウワーの不動点定理によって n 次元単体を覆う開集合族に共通部分が存在するという結果を証明し, それを用いてコアの存在証明を与えている。この節では Zhou による二段階の証明を統一し, 直接ブラウワーの不動点定理を用いたコアの存在定理の証明を解説する。

協力ゲームにはプレイヤーの利得 (あるいは効用) が譲渡可能 (transferable) であると考えられる TU (transferable utility) ゲームと, 譲渡不可能であると考えられる NTU (non-transferable utility) ゲームの 2 種類がある。TU ゲームにおいては何人かのプレイヤーのグループ (「提携 (coalition)」と呼ぶ) S が達成できる利得の和を実数 $v(S)$ で表したとき, その $v(S)$ をグループ全員で自由に分けることができると仮定されている。一方 NTU ゲームではそのグループに含まれる個々のプレイヤーの利得をベクトルで表し, そのグループで達成可能な利得が, ベクトルの集合 $V(S)$ で表現される。そのようなゲームを V で表す。

具体的に NTU ゲームのモデルを説明しよう。プレイヤーは n 人 (2 人以上有限の人数) でその集合を N とする。 N の部分集合 S について, その提携で達成可能な (n 次元の) 利得ベクトルの集合を $V(S)$ とする。全員の提携については $V(N)$ で表す。プレイヤー i が 1 人で達成できる利得は $V(\{i\})$ である。 $V(S)$ について以下の仮定をおく。

^{*16} Scarf, H., "The core of an N -person game", *Econometrica*, vol. 38, pp. 50-69, 1967.

^{*17} Shapley, L., "On balanced games without sidepayments", *Mathematical Programming* edited by , Academic Press, 1973.

^{*18} Shapley, L. and R. Vohra, "On Kakutani's fixed point theorem, the K-K-M-S theorem and the core of a balanced game", *Economic Theory*, vol. 1, pp. 108-116, 1991.

^{*19} Zhou, L., "A theorem on open coverings of a simplex and Scarf's core existence theorem through Brouwer's fixed point theorem", *Economic Theory*, vol. 4, pp. 473-477, 1994.

仮定 1 各 S ($S = N$ および $S = \{i\}$ の場合も含む, 以下同様) について $V(S)$ は上に有界な閉集合であり, 空集合ではない。

仮定 2 あるベクトル x が $V(S)$ に含まれ, $y \leq x$ (各成分について $y_i \leq x_i$) ならば $y \in V(S)$ である。この条件が成り立つとき $V(S)$ は包括的 (**comprehensive**) であると言う。ある利得ベクトルが達成可能ならばそれより小さい利得も達成可能であろう。

仮定 3 あるベクトル x が $V(S)$ に含まれ, 別のベクトル y が「 S に含まれるすべてのプレイヤー i について $x_i = y_i$ 」を満たすならば $y \in V(S)$ である。このとき $V(S)$ はシリンダーであると言う。あるベクトルが $V(S)$ に含まれるか否かは, S に含まれるプレイヤーの利得だけに依存し, S 以外のプレイヤーについてベクトルの成分が異なってもかまわないという条件である。 $V(S)$ は S の提携によって達成可能な S の人々の利得を表す集合であるから S 以外の人々の結果がどうなろうと関係はない。しかし $V(S)$ は上に有界なのである実数を r として利得ベクトルの各成分は r 以下である。

仮定 4 1 人のプレイヤーに関する $V(S)$ である $V(\{i\})$ におけるプレイヤー i の利得はある正の値を含む。形式的に書けば, ある $b_i > 0$ があって $V(\{i\}) = \{x \in R^n | x_i \leq b_i\}$ 。プレイヤーの利得としてフォン・ノイマン=モルゲンシュテルン型の効用関数を考えるならばこの仮定に問題はない。分析を容易にするための仮定である。

ある $x \in V(N)$ と提携 S について別のベクトル $y \in V(S)$ があって S に含まれるすべての i について $y_i > x_i$ が成り立つとき「提携 S が x を改善する」と言う。 $V(N)$ に含まれるベクトルの内いかなる提携によっても改善されないベクトルの集合がコアである。ゲーム V のコアを **Core** V と書く。

次に「平衡ゲーム」を定義する。 $|S|$ で提携 S の人数を表す。また m^S を S に含まれる i について $m_i^S = \frac{1}{|S|}$, それ以外の i について $m_i^S = 0$ であるような (n 次元の) ベクトルであるとする。したがって m^N は各成分が $\frac{1}{n}$ であるようなベクトルを表す。 N の部分集合の集合を F として

$$\sum_{S \in F} \lambda_S m^S = m^N$$

を満たす正の実数 λ_S が各 $S \in F$ について存在するとき F は平衡集合族 (**balanced collection of sets**) であると言う。この式を各成分 i について書くと $\sum_{S \in F, i \in S} \frac{\lambda_S}{|S|} = \frac{1}{n}$ より

$$\sum_{S \in F, i \in S} \frac{n}{|S|} \lambda_S = 1 \tag{14}$$

となる。つまりプレイヤー i を含むすべての提携 S について $\frac{n}{|S|} \lambda_S$ を合計すると 1 になる, ということがすべてのプレイヤーについて成り立つ。そのとき λ_S の値は S に含まれるすべての i について共通でなければならない。また, ある提携 S に含まれるプレイヤーの数は $|S|$ 人であるから (14) の左辺をプレイヤー全員について合計すると $\sum_{S \in F} n \lambda_S$ となり, それは n に等しいから $\sum_{S \in F} n \lambda_S = n$ より

$$\sum_{S \in F} \lambda_S = 1$$

が得られる。すなわち平衡集合族の λ_S の和は 1 に等しい。

簡単な例を考えてみよう。 $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{2, 3\}$, $S_3 = \{3, 4\}$, $S_4 = \{1, 4\}$ とすると $\lambda_{S_1} = \lambda_{S_2} = \lambda_{S_3} = \lambda_{S_4} = \frac{1}{4}$ として S_1, S_2, S_3, S_4 が平衡集合族になる。また $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{2, 3, 4\}$, $S_3 = \{4, 1\}$ の場合も $\lambda_{S_1} = \lambda_{S_2} = \frac{3}{8}$, $\lambda_{S_3} = \frac{1}{4}$ として S_1, S_2, S_3 が平衡集合族になる。

すべての平衡集合族 F について

$$\bigcap_{S \in F} V(S) \subset V(N)$$

が成り立つとき、このゲーム V は平衡ゲーム (balanced game) であると言う。

$V(N)$ の境界を $Bd(V(N))$, $V(S)$ の内部を $\text{Int}(V(S))$, R^n の内すべての成分が非負であるベクトルの集合 (非負象限) を R_+^n とし、

$$Q = Bd(V(N)) \cap R_+^n$$

とおく。 Q は全員の提携で達成可能な利得ベクトルの集合の境界 (最も外側, フロンティア) の内すべての成分が非負のベクトルからなる部分である。また $V(S)$ の内部と Q の共通部分を

$$U_S = \text{Int}(V(S)) \cap Q$$

と表す。ベクトル $x \in Q$ がある S について ($S = N$ の場合も含めて) U_S に含まれるとき U_S は (Q に対して相対的に) 開集合であるから U_S 内に x の近傍 (x を含む開集合) があり、その近傍には x よりも各成分が大きいベクトルも存在するので x は S によって改善される。したがって x はコアに含まれない。逆にベクトル $x \in Q$ がどの S についても ($S = N$ の場合も含めて) U_S に含まれないならば、いかなる S によっても改善されないので x はコアに含まれる。したがってコアは次のように表される。

$$\text{Core}(V) = Q \setminus \left(\bigcup_{S \subset N} U_S \right)$$

もしゲーム V がコアを持たなければ ($\text{Core}(V) = Q \setminus (\bigcup_{S \subset N} U_S) = \emptyset$ であれば)

$$\bigcup_{S \subset N} U_S = Q$$

である。

証明すべきは次の定理である。

定理 12. 平衡ゲームにはコアが存在する。

その証明は次節に回し、ここでは準備としていくつかの結果を示す。

補題 34. 次の式が成り立つ。

$$Q \cap \{x \in R^n | x_i = 0\} \subset U_{\{i\}}$$

$\{x \in R^n | x_i = 0\}$ はプレイヤー i の利得が 0 であるような利得ベクトルの集合である。

証明. 仮定 4 によってプレイヤー i の利得が 0 であるような利得ベクトルのすべてが $V(\{i\})$ の内部 $\text{Int}V(\{i\})$ に含まれるからそのような利得ベクトルの集合, すなわち $\{x \in R^n | x_i = 0\}$ と Q との共通部分は $\text{Int}V(\{i\})$ と Q との共通部分である $U_{\{i\}}$ に含まれる。□

補題 35. ゲーム V は平衡ゲームであるとする。任意の平衡集合族について U_S 全体の共通部分は空集合である。すなわち任意の平衡集合族 F について

$$\bigcap_{S \in F} U_S = \emptyset \quad (15)$$

証明. もし (15) が成り立たないとすると $\bigcap_{S \in F} U_S \neq \emptyset$ を満たす平衡集合族がある。それを F とする。任意の $x \in \bigcap_{S \in F} U_S$ について $\forall S \in F, x \in \text{Int}(V(S))$ であるから x の近傍 $O(x)$ で $\forall S \in F, O(x) \subset V(S)$ を満たすものがある。一方 $x \in \text{Bd}(V(N))$ であるから, ある $z \in O(x)$ で $z \notin V(N)$ となるものがある (x が $V(N)$ の境界にあり, $O(x)$ は開集合なのでそれに含まれる z の中には $V(N)$ からはみ出るものがある), そのとき $z \in \bigcap_{S \in F} V(S)$ 。しかし, それは平衡ゲームの条件 $\bigcap_{S \in F} V(S) \subset V(N)$ と矛盾する。□

補題 36. ゲーム V は平衡ゲームであるとする。 $\text{Bd}(V(N)) \cap R_+^n$ は $n-1$ 次元単体 Δ^{n-1} と同相である。

証明. Q から Δ^{n-1} への写像として

$$g(x) = \frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad (16)$$

をとる。仮定 4 における b_i を各成分とするベクトルを b で表す。この仮定と仮定 3 により次の式が成り立つ。

$$\forall i \in N, b \in V(\{i\})$$

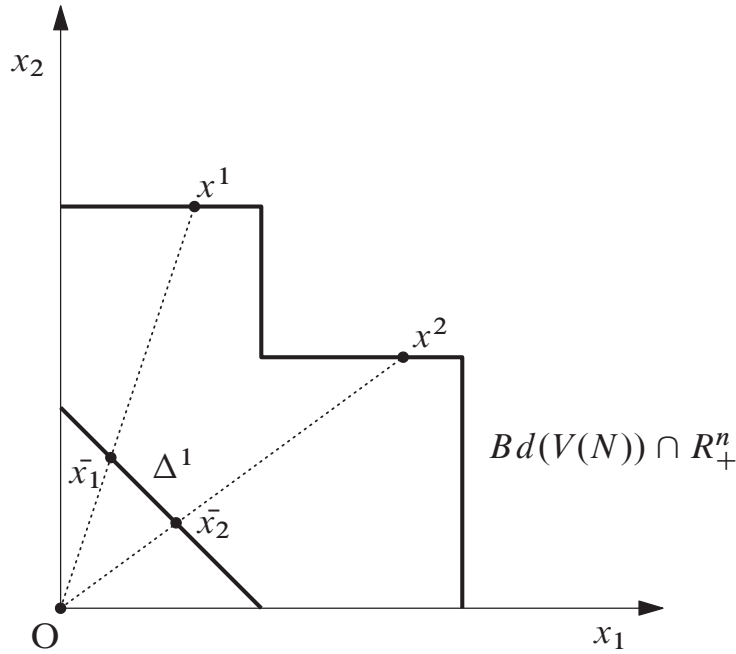
$V_{\{i\}}, i = 1, 2, \dots, n$ は $\lambda_{\{i\}}$ を $\frac{1}{n}$ としして平衡集合族であるから

$$b \in \bigcap_{i \in N} V(\{i\}) \subset V(N)$$

が成り立つ。仮定 2 により $V(N)$ が包括的であるから原点 $O(x=0)$ が $V(N)$ にその内部の点として含まれる。すなわち

$$0 \in \text{Int}(V(N))$$

したがって $\text{Bd}(V(N)) \cap R_+^n$ は原点を含まないので Q の点 x について $\sum_{i=1}^n x_i \neq 0$ であるから上の $g(x)$ が問題なく定義できる。 $g(x)$ は $\text{Bd}(V(N)) \cap R_+^n$ 上の点 x を, 原点とその x を結ぶ線分を $n-1$ 次元単体 Δ^{n-1} ($n=2$ の場合は $(1,0)$ と $(0,1)$ を結ぶ線分) まで延ばした (あるいは縮めた) 交点に対応させる写像である。どの点に対応するかは x の各成分の比によって決まりその比が異なれば $\frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i}$ の成分が異なるので異なる点に対応する。逆に Δ^{n-1} の点 $\frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i}$ から $\text{Bd}(V(N)) \cap R_+^n$ 上の点 x への対応を考えると $V(N)$ が包括的であることにより x と原点の間の



点はすべて $V(N)$ の内部に含まれるので $\frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i}$ が対応する $Bd(V(N)) \cap R_+^n$ 上の点は 1 つしかない。さらに $V(N)$ が包括的であることにより上記のベクトル b が $V(N)$ に含まれるから各成分について $0 \leq x_i \leq b_i$ であるようなすべてのベクトルが $V(N)$ に含まれるので原点 O と任意の Δ^{n-1} 上の点を通る線分を延長した直線は必ず $Bd(V(N))$ と交わる。 $g(x)$ が連続であることは明らかである。以上によって $g(x)$ は同相写像 (1 対 1 の連続写像) であり, $Bd(V(N)) \cap R_+^n$ と $n-1$ 次元単体 Δ^{n-1} は同相である。 \square

図は $n=2$ の場合の例を描いている。この図で x^1, x^2 が $Bd(V(N)) \cap R_+^n$ 上の点の例であり, $\bar{x}^1 = \frac{x^1}{\sum_{i=1}^n x_i^1}$, $\bar{x}^2 = \frac{x^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ はそれらに対応する Δ^1 上の点の例である。

前節の分析により, ゲーム V にコアが存在しなければ $\bigcup_{S \subset N} U_S = Q$ が成り立つ。各 S について U_S の Q における補集合を U_S^c で表す。 U_S は開集合であり, すべての i について $Q \cap \{x \in R^n | x_i = 0\} \subset U_{\{i\}}$ であるから, ある正の実数 α があって任意の i について次の式が成り立つ。

$$x_i \leq \alpha \longrightarrow |x, U_{\{i\}}^c| \geq \alpha$$

ここで x_i はベクトル x の第 i 成分であり, $|x, U_{\{i\}}^c|$ は x と $U_{\{i\}}^c$ との距離を表す。 $U_{\{i\}}$ は開集合なので x_i が十分に小さければ x は $U_{\{i\}}$ に含まれる。そのとき x と $U_{\{i\}}^c$ との距離はある実数 ε 以上となる。 ε が α 以上ならばその距離は α 以上であり, ε が α より小さければその ε を改めて α とすればよい。なお $U_{\{i\}}^c = \emptyset$ のときには $|x, U_{\{i\}}^c| = 1$ とする。ここで次の関数を定義する。

$$|S| \geq 2 \text{ であるような } S \text{ について, } k_S(x) = \begin{cases} 0, & \text{ある } i \text{ について } x_i \leq \alpha \text{ のとき} \\ |x, U_S^c|, & \text{すべての } i \text{ について } x_i > \alpha \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\text{各 } i \text{ について, } k_{\{i\}}(x) = \min(|x, U_{\{i\}}^c|, \alpha)$$

上記 (16) の Q と Δ^{n-1} との同相写像の逆写像 g^{-1} を用いて

$$|S| \geq 2 \text{ であるような } S \text{ について, } \bar{k}_S(\bar{x}) = k_S(x) \circ g^{-1}(\bar{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ある } i \text{ について } x_i \leq \alpha \text{ のとき} \\ |x, U_S^c|, & \text{すべての } i \text{ について } x_i > \alpha \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\text{各 } i \text{ について, } \bar{k}_{\{i\}}(\bar{x}) = k_{\{i\}}(x) \circ g^{-1}(\bar{x}) = \min(|x, U_{\{i\}}^c|, \alpha)$$

のように表す。ここで $\bar{x} = \frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i}$ である。これらを用いて

$$f_S(\bar{x}) = \frac{\bar{k}_S(\bar{x})}{\sum_{S \subset N} \bar{k}_S(\bar{x})}$$

を定義する。この関数について以下の性質が成り立つ。

- 補題 37.** (1). $\sum_{S \subset N} \bar{k}_S(\bar{x}) > 0$ である。
(2). $f_S(\bar{x})$ ならば $x \in U_S$ である。
(3). ある i について $x_i \leq \alpha$ ならば $f_{\{i\}} \geq \frac{1}{n}$ である。

証明. (1). $\bigcup_{S \subset N} U_S = Q$ であるから x はいずれかの $U_{\{i\}}$ に含まれるか、もしそうでなければ $|S| \geq 2$ であるような U_S のいずれかに含まれている。前者の場合 $|x, U_{\{i\}}^c| > 0$ である。後者の場合は $|x, U_S^c| > 0$ であるが、そのときすべての i について $x_i > \alpha$ である。もし、ある i について $x_i \leq \alpha$ ならば x は $U_{\{i\}}$ に含まれている。したがって $\sum_{S \subset N} k_S(x) > 0$ であり、 $\sum_{S \subset N} \bar{k}_S(\bar{x}) > 0$ であるから $f_S(\bar{x})$ は定義できる。

- (2). $f_S(\bar{x}) > 0$ ならば $|x, U_S^c| > 0$ なので

$$f_S(\bar{x}) \longrightarrow x \in U_S$$

が成り立つ。

- (3). ある i について $x_i \leq \alpha$ ならば $|x, U_{\{i\}}^c| > \alpha$ なので $\bar{k}_{\{i\}}(\bar{x}) = \alpha$ である。一方上の定義によってすべての j について $\bar{k}_{\{j\}}(\bar{x}) \leq \alpha$ であり、(ある i について $x_i \leq \alpha$ のときには) $|S| \geq 2$ であるようなすべての S について $\bar{k}_S(\bar{x}) = 0$ であるから $f_{\{i\}} \geq \frac{1}{n}$ が成り立つ。

□

$V(N)$ は上に有界であるからある実数を r として利得ベクトルの各成分は r 以下である。したがってその成分の和は nr 以下である。 $R = nr$ として次の関数を考える。

$$h(\bar{x}) = \bar{x} + \frac{\alpha}{R} \left(\sum_{S \subset N} f_S(\bar{x}) m^S - m^N \right) \quad (17)$$

定義から

$$\sum_{S \subset N} f_S(\bar{x}) = 1$$

である。(17)の各成分を考えてみよう。まず m^N の各成分は $\frac{1}{n}$ である。補題 37 の (3) で示したようにある i について $x_i \leq \alpha$ のとき $f_{\{i\}} \geq \frac{1}{n}$ であるから $\sum_{S \subset N} f_S(\bar{x})m^S$ の第 i 成分は $\frac{1}{n}$ 以上になる。したがって $x_i \leq \alpha$ のとき $h(\bar{x})$ の第 i 成分は負にはならない。また $x_i > \alpha$ であれば $h(\bar{x})$ の第 i 成分は $\frac{\alpha}{\sum_{i=j}^n x_j} - \frac{\alpha}{nR}$ 以上となるが $\sum_{i=j}^n x_j < R$ であるからやはり負にはならない。さらに $\sum_{S \subset N} f_S(\bar{x})m^S$ の各成分の和は 1 であり、 $\sum_{S \subset N} f_S(\bar{x})m^S - m^N$ の成分の和はゼロである。

m^S は $|S|$ 個の成分が $\frac{1}{|S|}$ であるベクトルであるから提携 $|S|$ に関する成分の和は $f_S(\bar{x})$ に等しい。したがって $\sum_{S \subset N} f_S(\bar{x})m^S$ の成分の和は $\sum_{S \subset N} f_S(\bar{x}) = 1$ である。一方 m^N の成分の和も 1 であるから $\sum_{S \subset N} f_S(\bar{x})m^S - m^N$ の成分の和はゼロである。

以上によって $h(\bar{x})$ は Δ^{n-1} から Δ^{n-1} への連続関数であり、ブラウワーの不動点定理によって $h(\bar{x}^*) = \bar{x}^* + \frac{\alpha}{R} (\sum_{S \subset N} f_S(\bar{x}^*)m^S - m^N) = \bar{x}^*$ となる \bar{x}^* がある。そのとき

$$\sum_{S \subset N} f_S(\bar{x}^*)m^S = m^N \quad (18)$$

が成り立つ。 x^* を \bar{x}^* に対応する $Bd(V(N)) \cap R_+^n$ 上の点、すなわち $g(x^*) = \frac{x^*}{\sum_{i=1}^n x^*} = \bar{x}^*$ とする。 $F = \{S | f_S(\bar{x}^*) > 0\}$ とすると F は平衡集合族である。補題 37 の (2) により $\forall S \in F, x^* \in U_S$ であるから $x^* \in \bigcap_{S \in F} U_S$ が成り立つ。しかしこれは前節の補題 21 で示した結果 $\bigcap_{S \in F} U_S = \emptyset$ と矛盾する。したがって平衡ゲームにはコアが存在しなければならない。

泥縄式不動点定理の解説 -競争均衡, ナッシュ均衡の存在証明付き-

2014年4月1日 初版発行

2016年4月1日 第2版発行

著者 たなかやすひと
田中靖人

発行 同志社大学経済学部

〒602-8580 京都市上京区今出川通烏丸東入

TEL 075-251-3648 (良心館・田中研究室)

Printed in Karasuma-Imadegawa